Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

Vorwort

Das vorliegende Skriptum gibt im wesentlichen den Inhalt einer 4-stündigen Vorlesung wieder, die ich im Sommersemester 1973 an der Universität Regensburg gehalten habe. Das Ziel der Vorlesung war der Beweis der Hauptsätze der globalen Funktionentheorie auf Steinschen Mannigfaltigkeiten, nämlich die Theoreme A und B von Cartan-Serre, und einige Anwendungen. Einige Sätze aus der lokalen Theorie, die dazu nötig sind (z.B. die Kohärenz der Strukturgarbe des $\mathbb{C}^n$) konnten aus Zeitmangel in der Vorlesung nicht bewiesen werden und sind ohne Beweis angegeben.

Ich danke den Herrn F. Jobst und E. Kisslinger, die die Vorlesung ausgearbeitet haben, sowie Fräulein J. Pfeilschifter, die das Manuskript getippt hat.

Regensburg, November 1973

Otto Forster

Inhaltsverzeichnis

1. Der Begriff der holomorphen Funktion

Hilfssatz 1. *Seien $c_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{C}$, $(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n$, $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. Die Reihe*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n}\zeta_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\zeta_n^{k_n}$$

konvergiere in irgend einer einfachen Anordnung der Reihenglieder. Seien $r_\nu > 0$ und es gelte $0 < r_\nu < |\zeta_\nu|$ für $\nu = 1,\ldots,n$. Dann konvergiert die Reihe

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_n}$$

absolut und gleichmäßig im abgeschlossenen Polyzylinder

$$\overline{P} := \{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| \leqslant r_\nu \text{ für } \nu = 1,\ldots,n\}.$$

Beweis. Sei $\theta_\nu := \dfrac{r_\nu}{|\zeta_\nu|}$, $0 < \theta_\nu < 1$, für $\nu = 1,\ldots,n$.
Da die Reihe $\sum c_{k_1\ldots k_n}\zeta_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\zeta_n^{k_n}$ konvergiert, gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|c_{k_1\ldots k_n}\zeta_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\zeta_n^{k_n}| \leqslant M \quad \text{für alle } (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Daraus folgt

$$|c_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_n}| \leqslant M\theta_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\theta_n^{k_n} \quad \text{für alle } (z_1,\ldots,z_n) \in \overline{P}.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt daher die Behauptung.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn sich f um jeden Punkt von U in eine Taylorreihe entwickeln lässt, d.h. wenn für jedes $a \in U$ komplexe Zahlen $c_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{C}$, $(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n$, und eine Umgebung $V \subset U$ von a existieren, so dass

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(z_n-a_n)^{k_n}$$

Kap. 1 zuletzt geändert am: 2012-10-27

für alle $z = (z_1, \dots, z_n) \in V$.

Bemerkung. Die holomorphen Funktionen sind stetig, da die darstellenden Taylorreihen nach Hilfssatz 1 lokal gleichmäßig konvergieren.

Bezeichnung. Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller in U holomorphen Funktionen.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *partiell holomorph*, falls gilt:

Für jedes $a \in U$ und jedes $\nu = 1, 2, \dots, n$ ist die Funktion *einer* Veränderlichen

$$\begin{aligned} F_{a\nu} : U_{a\nu} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta &\longmapsto F_{a\nu}(\zeta) := F(a_1, \dots, a_{\nu-1}, \zeta, a_{\nu+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

holomorph in

$$U_{a\nu} := \{\zeta \in \mathbb{C} : (a_1, \dots, a_{\nu-1}, \zeta, a_{\nu+1}, \dots, a_n) \in U\} \subset \mathbb{C}.$$

Satz 1. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie stetig und partiell holomorph ist.*

Bemerkung. Nach F. Hartogs [Hart14] ist eine Funktion bereits dann holomorph, wenn sie partiell holomorph ist, vgl. [L2] und [L19]. Die Stetigkeit braucht also nicht eigens gefordert zu werden.

Corollar. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt auch $fg \in \mathcal{O}(U)$. Falls $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, gilt $1/f \in \mathcal{O}(U)$.*

Dies folgt nach Satz 1 sofort aus den entsprechenden Aussagen für holomorphe Funktionen einer Veränderlichen.

Der Vektorraum $\mathcal{O}(U)$ ist also sogar eine $\mathbb{C}$-Algebra, insbesondere ein Ring.

Beweis von Satz 1.
i) Sei zunächst vorausgesetzt, dass f holomorph ist. Dann ist f stetig und für jeden Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ gilt in einer Umgebung V von a

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n = 0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - a_n)^{k_n},$$

also

$$F_{a\nu}(\zeta) = f(a_1, \ldots, a_{\nu-1}, \zeta, a_{\nu+1}, \ldots, a_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{0\ldots k\ldots 0}(\zeta - a_\nu)^k,$$

wobei in $c_{0\ldots k\ldots 0}$ der Index k an ν-ter Stelle steht. Dies zeigt, dass $F_{a\nu}$ holomorph, also f partiell holomorph ist.

ii) Die umgekehrte Implikation folgt direkt aus folgendem Hilfssatz.

Hilfssatz 2. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige, partiell holomorphe Funktion. Seien $a \in U$, $r_\nu \in \mathbb{R}_+^*$ und*

$$P := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - a_\nu| < r_\nu, 1 \leqslant \nu \leqslant n\}.$$

Es gelte $\overline{P} \subset U$. Wir definieren für alle $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$

$$c_{k_1\ldots k_n} := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{|\zeta_\nu - a_\nu| = r_\nu \\ 1 \leqslant \nu \leqslant n}} \!\!\ldots\!\! \int \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(z_1 - a_1)^{k_1+1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n+1}}\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n.$$

Damit gilt

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{n} c_{k_1\ldots k_n}(z_1 - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - a_n)^{k_n}$$

für alle $z \in P$. Außerdem ist

$$c_{k_1\ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}(a).$$

Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Variablen.

Für $n = 1$ sind die Aussagen aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen bekannt.

Induktionsschritt $n \to n - 1$. Wir setzen

$$(*) \qquad c_k(z_1, \ldots, z_{n-1}) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_n - a_n)^{k+1}}\, d\zeta_n$$

Nach dem Fall $n = 1$, angewandt auf f als Funktion von z_n (bei festen $z_1, \dots, z_{n-1}$) gilt

$$(**) \qquad f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1, \dots, z_{n-1})(z_n - a_n)^k$$

c_k ist eine stetige Funktion von $z_1, \dots, z_{n-1}$ und partiell holomorph, denn man kann in $(*)$ unter dem Integral differenzieren und erhält $\dfrac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$ für $\nu = 1, \dots, n-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$c_k(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_{n-1} k}(z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_{n-1} - a_{n-1})^{k_{n-1}},$$

wobei

$$\begin{aligned} c_{k_1 \dots k_{n-1} k} &= \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int \cdots \int_{\substack{|\zeta_\nu - a_\nu| = r_\nu \\ \nu = 1, \dots, n-1}} \frac{c_k(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})}{(\zeta_1 - a_1)^{k_1+1} \cdots (\zeta_{n-1} - a_{n-1})^{k_{n-1}+1}} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{(2\pi i)^{n}} \int \cdots \int_{\substack{|\zeta_\nu - a_\nu| = r_\nu \\ \nu = 1, \dots, n}} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_1 - a_1)^{k_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{k_n+1}} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1} d\zeta_n. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$c_{k_1 \dots k_{n-1} k} = \frac{1}{k_1! \cdots k_{n-1}!} \cdot \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{n-1}} c_k}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_{n-1}^{k_{n-1}}}(a_1, \dots, a_{n-1})$$

und wegen $(**)$

$$c_k(a_1, \dots, a_{n-1}) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial z_n^k}(a_1, \dots, a_{n-1}),$$

also

$$c_{k_1 \dots k_{n-1} k} = \frac{1}{k_1! \cdots k_{n-1}! k!} \cdot \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{n-1} + k} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_{n-1}^{k_{n-1}} \partial z_n^k}(a_1, \dots, a_n).$$

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ heißt in eiem Punkt $a \in U$ *(total) komplex differenzierbar*, wenn es eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

gibt, so dass für $a + \zeta \in U$

$$f(a + \zeta) = f(a) + A\zeta + \|\zeta\|\varphi(\zeta) \qquad \text{mit } \lim_{\zeta \to 0} \varphi(\zeta) = 0.$$

Die Matrix $A =: J_f(a)$ heißt die *Jacobimatrix* von f in a.

Bemerkung. Ist f total komplex differenzierbar, dann ist f auch total reel differenzierbar, denn jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist auch $\mathbb{R}$-linear.

Satz 2. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph in U, wenn sie in jedem Punkt $a \in U$ total komplex differenzierbar ist.*

Beweis. Ist f total komplex differenzierbar, so ist f stetig und partiell komplex differenzierbar, also auch stetig und partiell holomorph (Satz von Goursat), nach Satz 1 daher holomorph.

Zur Umkehrung: Aus der Entwickelbarkeit in eine Taylorreihe folgt, dass sich jede in einer Umgebung von a holomorphe Funktion darstellen lässt als

$$f(a + \zeta) = f(a) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \zeta_\nu + |\zeta|\varphi(\zeta) \quad \text{mit } \lim_{\zeta \to 0} \varphi(\zeta) = 0.$$

Daher ist f total komplex differenzierbar.

Satz 3. *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige, partiell reell-differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

$$f \text{ holomorph} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Dies folgt wegen Satz 1 unmittelbar aus der entsprechenden Aussage für Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Definition. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$$

heißt holomorph, wenn alle $f_\mu : U \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

Satz 4. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}^m$ ist genau dan holomorph, wenn f in jedem Punkt $a \in U$ total komplex differenzierbar ist.*

Dies folgt einfach aus Satz 2.

Satz 5. *Seien $U \subset \mathbb{C}^n$ und $V \subset \mathbb{C}^m$ offene Mengen und*

$$f : U \to \mathbb{C}^m, \quad g : V \to \mathbb{C}^k$$

holomorphe Abbildungen mit $f(U) \subset V$. Dann ist die zusammengesetzte Abbildung

$$g \circ f : U \to \mathbb{C}^k$$

ebenfalls holomorph und für die Jacobi-Matrizen gilt für alle $a \in U$

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a).$$

Beweis. Dies folgt aus der entsprechenden Eigenschaft reell differenzierbarer Abbildungen. Insbesondere ist die zusammengesetzte Abbildung wieder holomorph, weil die Komposition komplex linearer Abbildungen wieder komplex linear ist.

Corollar. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $a \in U$ und $b \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Wir setzen*

$$S := \{t \in \mathbb{C} : a + tb \in U\}.$$

Dann ist S offen in $\mathbb{C}$ und die Funktion

$$g : S \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(a + tb)$$

ist holomorph.

Beweis. Es gilt $g = f \circ \varphi$, wobei $\varphi : S \to U \subset \mathbb{C}^n$ die holomorphe Abbildung $t \mapsto a + tb$ ist.

Bemerkung. Man kann S als den Schnitt von U mit der komplexen Geraden durch a mit Richtungsvektor b auffassen. Die Funktion g ist dann die Beschränkung von f auf S.

Definition. Seien U, V offene Teilmengen von $\mathbb{C}^n$. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt *biholomorph*, falls f holomorph und bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ ebenfalls holomorph ist.

Satz 6. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $a \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung mit* $\det J_f(a) \neq 0$. *Dann existieren offene Umgebungen $U_1 \subset U$ von a und $V \subset \mathbb{C}^n$ von $f(a)$, so dass die Einschränkung*

$$f \mid U_1 \to V$$

biholomorph ist und es gilt

$$J_{f^{-1}}(f(a)) = J_f(a)^{-1}.$$

Dies folgt aus dem entsprechenden Satz für stetig differenzierbare Abbildungen im $\mathbb{R}^{2n}$.

Satz 7. *Seien $G_\nu \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete und*

$$Z := G_1 \times \ldots \times G_n \subset \mathbb{C}^n.$$

Dann gibt es $r_\nu \in \{1, \infty\}$ und eine biholomorphe Abbildung $f : Z \to P$, wobei

$$P := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < r_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es biholomorphe Abbildungen

$$f_\nu : G_\nu \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_\nu\}.$$

(Falls $G_\nu = \mathbb{C}$, ist $r_\nu = \infty$; sonst kann man $r_\nu = 1$ wählen.)
Wir definieren nun $f : Z \to P$ durch

$$f(z_1, \ldots, z_n) := (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n)).$$

Dies ist die gesuchte biholomorphe Abbildung.

Bemerkung. Nach H. Poincaré [24] (vgl. auch Reinhardt [25]) lässt sich der Dizylinder

$$D := \{(z_1.z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

nicht biholomorph auf die Einheitskugel im $\mathbb{C}^2$

$$E := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

abbilden.
Ein Beweis dieser Aussage ist auch in Narasimahan [Nar19], p. 70, dargestellt.