Übungsblatt 9

Andreas Fackler

18. Juni 2008

Aufgabe 1 (Fischer 3.3.1)

(a) Ist die Abbildung $K^{n\times n} \to K^{n\times n}, A \mapsto A^\sharp$ linear?

(b) Zeigen Sie: $(A^\sharp)^t = (A^t)^\sharp$, $(AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$

(c) $\det A^\sharp = (\det A)^{n-1}$

(d) $(A^\sharp)^\sharp = (\det A)^{n-2} \cdot A$

Aufgabe 2

Die Folge der stetig differenzierbaren Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Folge f_n' der Ableitungen konvergiere gleichmäßig gegen ein $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige, dass dann f stetig differenzierbar ist und $f' = g$ gilt. (Hinweis: Benutze den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, sowie die Vertauschbarkeit von Limes und Integral bei gleichmäßiger Konvergenz.)

Aufgabe 3

Betrachte die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ mit $a, c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{C}$. Zeige:

(a) Wenn $f(z_1)$ konvergiert und $0 < r < |z_1 - a|$, so konvergiert f auf der Kreisscheibe $K_r = \{z | |z-a| \leq r\}$ absolut und gleichmäßig.

(b) Die Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ konvergiert dann ebenfalls absolut und gleichmäßig auf K_r.

(c) Auf K_r ist f stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$.

(d) Für den Konvergenzradius $R = \sup\{|z-a| | f(z) \text{ konvergiert}\}$ der Potenzreihe f gilt:

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$$