Übungsblatt 7

Andreas Fackler

5. Juni 2008

Aufgabe 1

Entscheide, welche der folgenden $\mathbb{R}^{3\times 3}$-Matrizen diagonalisierbar sind und diagonalisiere sie.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung $\Psi : V \to V$ mit $\Psi(f)(x) := f(x+1)$ linear ist, bestimme ihre Eigenwerte und gib zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.

Aufgabe 3

Berechne die Taylorreihen der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ für } x \neq 0 \text{ und } f(0) = 0$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1}$$

im Punkt 0. Konvergieren sie? Konvergieren sie gegen f?

Aufgabe 4 (Forster 22.5)

Man beweise die Funktionalgleichung des Arcustangens: Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$ gilt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

Man folgere hieraus die “Machinsche Formel”

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$