Übungsblatt 6

Andreas Fackler

29. Mai 2008

Aufgabe 1 (Fischer 4.1)

Sei V ein K-Vektorraum und $F, G : V \to V$ linear. Zeige:

(a) Ist F nilpotent, so ist 0 sein einziger Eigenwert.

(b) Hat $F^2 + F$ den Eigenwert -1, so hat F^3 den Eigenwert 1.

(c) Ist v Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert λ und ist $G(v) \neq 0$, so ist $G(v)$ Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

(d) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte.

Aufgabe 2

Entscheide, welche der folgenden $\mathbb{R}^{3\times 3}$-Matrizen diagonalisierbar sind und diagonalisiere sie.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung $\Psi : V \to V$ mit $\Psi(f)(x) := f(x+1)$ linear ist, bestimme ihre Eigenwerte und gib zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor an.