Übungsblatt 4

Andreas Fackler

14. Mai 2008

Aufgabe 1 (Forster, 15.1)

Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}$:
$f_1(x) = x^{x^x}, \quad f_2(x) = (x^x)^x, \quad f_3(x) = x^{x^a}, \quad f_4(x) = x^{a^x}, \quad f_5(x) = a^{x^x}$

Aufgabe 2

Für welche Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion in 0 stetig fortsetzbar? Für welche Exponenten ist die Fortsetzung differenzierbar?

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist in a differenzierbar mit Ableitung c, das heißt, der Differenzialquotient ist c:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c$$

(b) Es gibt eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$, so dass für alle x gilt:

$$f(a+x) = f(a) + c \cdot x + \varphi(x)$$

(c) Es gibt eine stetige Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\psi(0) = 0$, so dass für alle x gilt:

$$f(a+x) = f(a) + c \cdot x + \psi(x) \cdot |x|$$