Übungsblatt 3

Andreas Fackler

30. April 2008

Aufgabe 1

Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit: Eine Funktion f ist Lipschitz-stetig, wenn es ein $\Theta > 0$ gibt, so dass für alle x, y gilt: $|f(x) - f(y)| \leq \Theta \cdot |x - y|$.

(a) $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{sign}(0) = 0$ und $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2)$

(c) $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

(d) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \arctan(nx)$. Welche f_n sind stetig?. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ stetig?

Aufgabe 3 (Banachscher Fixpunktsatz)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig mit einer Konstante $\Theta \in]0, 1[$.

(a) Zeige, dass f höchstens einen Fixpunkt haben kann, das heißt: Falls $x = f(x)$ und $y = f(y)$, so ist $x = y$.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl und sei jeweils $x_{n+1} = f(x_n)$. Finde für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abschätzung von

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_1 - x_0|}$$

und folgere, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

(c) Zeige, dass f genau einen Fixpunkt hat.