# Übungsblatt 11

Andreas Fackler

14. Juli 2008

## Aufgabe 1: Fourierreihen (Forster 1, 23.2)

Berechne die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) = |\sin(x)|$.

## Aufgabe 2: Implizite Funktionen, lokale Invertierbarkeit, Extrema unter Nebenbedingungen

**(a)** Ist

$$f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{x}{2} + x^\alpha \cos \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$$

in einer Umgebung von $0$ invertierbar, falls $\alpha = 2$ ist? Und für $\alpha = 3$?

**(b)** Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Beweise mit dem Satz über implizite Funktionen, dass es für alle $x_0 \in ]-1, 1[$ eine stetig differenzierbare positive Funktion $g$ gibt, die auf einer kleinen Umgebung $U$ von $x_0$ definiert ist und $F(x, g(x)) = \frac{1}{e}$ erfüllt, und berechne ihre Ableitung in $x_0$.

**(c)** Finde die Maxima und Minima von $G(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $F(x, y) = \frac{1}{e}$.

## Aufgabe 3: Längen von Kurven

Sei $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = e^{t(a+ib)}$. Für welche Werte von $a + ib \in \mathbb{C}$ hat $\gamma$ eine endliche Länge? Was ist in diesen Fällen die Länge von $\gamma$?

## Aufgabe 4: Ideale und Minimalpolynome

**(a)** Zeige, dass die geraden Zahlen ein Ideal in $\mathbb{Z}$ bilden.

**(b)** Sei $f(t) = 3t^3 + 9t$ und $g(t) = t^3 - t^2 + 3t - 3$. Welches normierte Polynom erzeugt das von $f$ und $g$ erzeugte Ideal $\{af + bg | a, b \in \mathbb{R}[t]\}$ des Ringes $\mathbb{R}[t]$ der Polynome über $\mathbb{R}$?

**(c) (Fischer 4.5.7)** Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte eines diagonalisierbaren Endomorphismus $F$ über einem endlichdimensionalen Vektorraum. Zeige, dass $(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r) \in K[t]$ das Minimalpolynom von $F$ ist.

## Aufgabe 5: Jordansche Normalform

Berechne die Jordansche Normalform der folgenden Matrix aus $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{Z}/5)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$