

Übungsblatt 10

Andreas Fackler

2. Juli 2008

Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen sind Normen auf \mathbb{R}^2 ?

- $\|(x, y)\|_a = |x| + |y|$
- $\|(x, y)\|_b = |x + y|$
- $\|(x, y)\|_c = \sqrt[5]{\max\{|x|^5, |y|^5\}}$
- $\|(x, y)\|_d = |x|^5 + |y|^5$

Aufgabe 2

Zeige:

- Die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} sind genau die Intervalle.
- Sind X und Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subseteq X$ zusammenhängend, so ist auch $f[A]$ zusammenhängend.
- Folgere hieraus den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, zusammen mit der Supremumsnorm. Die Abbildung $D : V \rightarrow V$ sei definiert durch $D(f) := f'$. Zeige:

- D ist linear.
- D ist nicht stetig.
- Sei $U = \text{span}\{f, g\}$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$. Zeige, dass $D[U] = U$ ist und diagonalisiere $D \upharpoonright U$. (Hinweis: g ist Linearkombination von \sin und \cos .)