

# Übungsblatt 10

Andreas Fackler

2. Juli 2008

## Aufgabe 1

Welche der folgenden Abbildungen sind Normen auf  $\mathbb{R}^2$ ?

- $\|(x, y)\|_a = |x| + |y|$
- $\|(x, y)\|_b = |x + y|$
- $\|(x, y)\|_c = \sqrt[5]{\max\{|x|^5, |y|^5\}}$
- $\|(x, y)\|_d = |x|^5 + |y|^5$

## Aufgabe 2

Zeige:

- Die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind genau die Intervalle.
- Sind  $X$  und  $Y$  metrische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subseteq X$  zusammenhängend, so ist auch  $f[A]$  zusammenhängend.
- Folgere hieraus den Zwischenwertsatz.

## Aufgabe 3

Sei  $V$  der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , zusammen mit der Supremumsnorm. Die Abbildung  $D : V \rightarrow V$  sei definiert durch  $D(f) := f'$ . Zeige:

- $D$  ist linear.
- $D$  ist nicht stetig.
- Sei  $U = \text{span}\{f, g\}$  mit  $f(x) = \sin(x)$  und  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ . Zeige, dass  $D[U] = U$  ist und diagonalisiere  $D \upharpoonright U$ . (Hinweis:  $g$  ist Linearkombination von  $\sin$  und  $\cos$ .)