Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis II Tutorium

Blatt 9

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))$ und $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Funktionen.

Wir definieren $\operatorname{rot} f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\operatorname{div} f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{Grad} g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ als

$\operatorname{rot} f := (\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2})$, $\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ und
$\operatorname{Grad} g := (\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n})$.

Aufgabe 9.1. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar.

Zeigen Sie dass $\operatorname{div}\operatorname{rot} f = 0$, wo $0\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion Null ist.

Aufgabe 9.2. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

Zeigen Sie dass $\operatorname{rot}\operatorname{Grad} f = (0,0,0)$, wo $(0,0,0)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(0,0,0)(x,y,z) := (0,0,0)$ die Funktion Konstant $(0,0,0)$ ist.

Aufgabe 9.3.

$$\text{Sei } f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in $(0,0)$ existieren
2. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nicht stetig in $(0,0)$ sind.

Aufgabe 9.4.

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktionen. Sei $\phi(x,t) := f(x-t) + g(x+t)$.

1. Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$
2. Skizzieren Sie ϕ, mit $f(x) := x^2$ und $g(x) := 0$