LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Sommersemester 2010
14. Mai 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 4

Aufgabe 4.1. Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) $\emptyset$ und X sind offene Mengen.

(b) Sind U und V offen, so ist auch $U \cap V$ offen.

(c) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen, das heißt: Sei I irgendeine Menge und für jedes $i \in I$ sei U_i offen; dann ist auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i \quad = \quad \{x \in X \mid \text{Es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in U_i.\}$$

offen.

(Ein System von Teilmengen einer Menge X, das $\emptyset$ und X enthält und abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten ist, heißt *Topologie*. X ist also zusammen mit dem System der offenen Mengen ein *topologischer Raum*.)

Aufgabe 4.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = y\}$ ihr Graph. Zeigen Sie, dass G genau dann eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist, wenn f stetig ist.

Aufgabe 4.3. Seien $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Beweisen Sie, dass dann auch

$$K + L \quad = \quad \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 4.4. Betrachten Sie folgende Mengen:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Regelfunktion.}\} \\
X_2 &= \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar und } f(0) = 0.\} \\
X_3 &= \{f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar.}\} \\
X_4 &= \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und } f(0) = 1,\}
\end{aligned}$$

sowie folgende Abbildungen:

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)| \mathrm{d}x \qquad \|f\|_2 = \sup_x |f(x)| \qquad \|f\|_3 = \sup_x |f'(x)|.$$

Welches X_i und $\| \|_j$ bildet zusammen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation einen normierten Vektorraum? Ist dieser vollständig? Ist der Einheitsball

$$\mathbf{U}_1(0) = \{f \in X_i \mid \|f\|_j \leq 1\}$$

kompakt?