LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis II Tutorium

Blatt 3

Aufgabe 3.1. Sei $x,\, y \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren und es sei $\theta \in [0,\, \pi]$ der Winkel zwischen x und y. Zeigen Sie

(1) $<x, y> = \|x\|\|y\|\cos\theta$

(2) Nehmen wir an $x \neq 0 \neq y$. Dann x senkrecht auf $y \iff \; <x, y> = 0$

(3) Was sind die Vektoren $x\frac{<x,\, y>}{<x,\, x>^2}$ und $y\frac{<x,\, y>}{<y,\, y>^2}$.?

(4) Nehmen wir an, dass x senkrecht auf y steht. Es sei c ein Vektor, der in der von von x und y aufgespannten Ebene liegt, dass heisst, es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass $c = \alpha x + \beta y$. Drücken Sie die Werte α und β durch das innere Produkts von c und x bzw. y aus.

Aufgabe 3.2.

(1) Sei $x_n := (\arctan(n), \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $\operatorname*{Lim}_{n \longrightarrow \infty} x_n$

(2) Existiert $\operatorname*{Lim}_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$?

(3) Zeigen Sie dass $\operatorname*{Lim}_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

Aufgabe 3.3.

(1). Sei $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Funktion $h(x) = (\cos(x), \sin(x), x)$.

(1.1) Zeigen Sie dass h stetig ist.

(1.2) Skizzieren h.

(2) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x,\, y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

(2.1) Zeigen Sie dass f stetig in $\mathbb{R}^2$ ist.

(2.2) Skizzieren Sie f.

(3). Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^2 | x < 1\} \cup \{(1,0)\}$ und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R},\; f(x,y) := x$ für alle $(x, y) \in A$.

(3.1) Zeigen Sie dass f stetig ist.

(3.2) Skizzieren Sie f.

(4). Sei $A := \{x \in \mathbb{R}^2 | x < 1\} \cup \{(2,0)\}$ und $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R},\; g(x,y) := x$ für alle $(x, y) \in A\backslash\{(2,0)\}$ und $g(2,0) = 1000$.

(4.1) Zeigen Sie dass g stetig ist.

(4.2) Skizzieren Sie g.

Aufgabe 3.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^n$ Umgebungen von einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

(1) Zeigen Sie dass $U \cap V$ und $U \cup V$ Umgebungen von x sind.

(2) Es sei $y \in U$. Ist U eine Umgebung von y?.

(3) Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Umgebungen von x. Ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ eine Umgebung von x?