LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides Garcia Cornejo, Andreas Fackler

Sommersemester 2010
30. April 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 2

Aufgabe 2.1. Welche der folgenden Abbildungen $\|\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ sind Normen?

(a) $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$

(b) $\|x\| = \min\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$

(a) $\|x\| = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{x}{r} \in K\}$, wobei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine (bzgl. der euklidischen Norm) beschränkte Menge mit folgenden Eigenschaften ist: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $\frac{x}{r} \in K$; und falls $x, y \in K$, so ist auch für jedes $\alpha \in [0,1]$: $\alpha(x+y)-y \in K$.

Aufgabe 2.2. Welche der folgenden Abbildungen $d : X^2 \to \mathbb{R}$ sind Metriken?

(a) $X = \mathbb{R}^2$ und $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

(b) X ist irgendeine Menge, $d(x,x) = 0$ und für $x \neq y$ ist $d(x,y) = 1$.

(c) $X = \mathbb{R}$, $d(x,x) = 0$ und für $x \neq y$ ist $d(x,y) = \frac{1}{|x-y|}$.

(d) X ist Menge von endlichen Mengen und $d(A,B) = |A\Delta B|$, wobei $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die symmetrische Differenz ist und $|A|$ die Anzahl der Elemente der Menge A. $d(A,B)$ gibt also an, wieviele Elemente in genau einer der beiden Mengen A und B liegen.

Aufgabe 2.3. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 4$ im Punkt 2

(b) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $\frac{\pi}{4}$

Aufgabe 2.4. Zeigen Sie, dass die folgende Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Ist f differenzierbar?

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(2^k x\right)}{4^k}$$