Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Sommersemester 2010
9. Juli 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Tutorium 12

Aufgabe 12.1. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: A ist genau dann kompakt, wenn jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Aufgabe 12.2. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *offen*, wenn für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ auch die Bildmenge

$$f[U] := \{f(x) \mid x \in U\}$$

offen ist. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen offen sind:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \max\{x, 0\}$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Aufgabe 12.3. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ offene Abbildungen sind, dann ist auch $f + g$ offen.

Aufgabe 12.4. l^1 sei die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ konvergiert. Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ sei:

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \\
\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass l^1 sowohl mit $\|\|_1$ als auch mit $\|\|_\infty$ ein normierter Vektorraum ist. Zeigen Sie außerdem, dass die beiden Normen nicht äquivalent sind, das heißt, es gibt keine Konstanten $c_0, c_1 > 0$, so dass für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$c_0\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \leq c_1\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$$