LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

14. Oktober 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zur Nachholklausur

Aufgabe 1: Wir zeigen per Induktion, dass die n-te Ableitung von f

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-1)^{-1-n}$$

ist:

- Induktionsanfang: $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x-1} = (-1)^0 0!(x-1)^{-1-0}$
- Induktionsschritt: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = ((-1)^n n!(x-1)^{-1-n})' = (-1)^n n!(-1-n)(x-1)^{-1-n-1} = (-1)^{n+1}(n+1)!(x-1)^{-1-(n+1)}$

Damit ist bewiesen, dass $f^{(n)}(-1) = (-1)^n n!(-2)^{-1-n} = -n!2^{-1-n}$. Somit ist die Taylorreihe von f in -1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2^{-1-n}(x+1)^n$$

Aufgabe 2: $f'(t) = (6t-6, 8t-8)$, also ist f stetig differenzierbar. Daraus folgt, dass f rektifizierbar ist mit Länge:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|f'(t)\| \mathrm{d}t &= \int_0^1 \sqrt{(6t-6)^2 + (8t-8)^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(36+64)(t-1)^2} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{100} \cdot \sqrt{(t-1)^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 10|t-1| \mathrm{d}t = \int_0^1 (10-10t) \mathrm{d}t \\
&= 10t - 5t^2 \Big|_0^1 = 5
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Der Gradient $\mathrm{D}f(x,y) = (3(x+y)^2 + 3(x-y)^2 - 2, 3(x+y)^2 - 3(x-y)^2) = (6x^2 + 6y^2 - 2, 12xy)$ ist null genau dann, wenn $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ und $xy = 0$, wenn also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $y = 0$ oder $x = 0$ und $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. f kann dann höchstens in den dadurch gegebenen vier Punkten ein lokales Extremum haben. Die Hesse-Matrix von f im Punkt (x,y) ist:

$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 12y \\ 12y & 12x \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Falls $x = 0$ und $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, ist diese indefinit, da dann ihre Determinante $-144y^2 = -48$ negativ ist. Folglich hat f in den Punkten $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ und $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ keine lokalen Extrema.

Für $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ist die Determinante positiv (nämlich 48), und der linke obere Eintrag der Matrix is x, also ist $\mathrm{Hess}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ positiv definit und $\mathrm{Hess}f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ negativ definit. Das heißt, f hat in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ein lokales Minimum und in $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ein lokales Maximum.

Aufgabe 4: Ist x kein ganzzahliges Vielfaches von π, so ist f in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar, also insbesondere differenzierbar, denn

$$\mathrm{D}_1 f(a, b) = \frac{2b\cos a}{(\sin a)^3} e^{-\frac{1}{(\sin a)^2}} \quad \text{und} \quad \mathrm{D}_2 f(a, b) = e^{-\frac{1}{(\sin a)^2}}.$$

Wir zeigen, dass f auch für $a = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ in $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist mit Ableitung null. Hierfür müssen wir nachrechnen, dass die Abbildung r, die durch

$$f(x, y) = f(a, b) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (x - a, y - b) + r(x, y)\|(x - a, y - b)\|$$

und $r(a, b) = 0$ definiert ist, in (a, b) stetig ist. Sei also $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen (a, b) konvergente Folge. Für alle n, für welche x_n ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, ist $r(x_n, y_n)$ sowieso null. Falls dies also für alle bis auf endlich viele n der Fall ist, ist $\lim_{n\to\infty} r(x_n, y_n) = 0$ und wir sind fertig. Falls es unendlich viele n gibt, so dass x_n nicht ganzzahliges Vielfaches von π ist, bleibt noch die Teilfolge ebendieser n zu betrachten. Wir nehmen also nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass x_n niemals von der Form $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist:

$$\begin{aligned}
\|r(x_n, y_n)\| &= \frac{\left\| f(x_n, y_n) - f(a, b) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (x_n - a, y_n - b) \right\|}{\|(x_n - a, y_n - b)\|} = \frac{|y_n| e^{-\frac{1}{(\sin x_n)^2}}}{\|(x_n - a, y_n - b)\|} \\
&= |y_n| \frac{e^{-\frac{1}{(\sin(x_n - k\pi))^2}}}{\|(x_n - k\pi, y_n - b)\|} \le |y_n| \frac{e^{-\frac{1}{(\sin(x_n - k\pi))^2}}}{|x_n - k\pi|} \le |y_n| \frac{e^{-\frac{1}{(x_n - k\pi)^2}}}{|x_n - k\pi|} \\
&= |y_n| \frac{1}{|x_n - k\pi| e^{\frac{1}{(x_n - k\pi)^2}}} \le |y_n| \frac{1}{|x_n - k\pi| \frac{1}{(x_n - k\pi)^2}} \\
&= |y_n||x_n - k\pi| \longrightarrow_{n\to\infty} b \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Also ist $r(a, b) = 0 = \lim_{(x,y)\to(a,b)} r(x, y)$. (In der zweiten Ungleichung haben wir benutzt, dass $|\sin x| \le |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 5: Die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{D}f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x}\cos y & -e^{2x}\sin y \\ 2e^{2x}\sin y & e^{2x}\cos y \end{pmatrix}$$

von f in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat Determinante $2e^{4x}(\cos y)^2 + 2e^{4x}(\sin y)^2 = 2e^{4x} > 0$, ist also invertierbar. Damit hat nach dem lokalen Umkehrsatz der Punkt (x, y) eine Umgebung, in der die Funktion f umkehrbar ist.

Aufgabe 6: Als Urbild $f^{-1}[(-\infty, 1]]$ der abgeschlossenen Menge $(-\infty, 1]$ unter der stetigen Funktion f ist A abgeschlossen.

Angenommen, A wäre nicht beschränkt. Dann gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die entweder gegen ∞ oder $-\infty$ divergiert. Wegen $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ müsste also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$ gelten. Dies ist ein Widerspruch, da wegen $x_n \in A$ für jedes n gelten muss: $f(x_n) \leq 1$.

A ist also abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt.