Andreas Fackler 5. Oktober 2010

# Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
## Lösungsvorschlag zur Klausur

**Aufgabe 1:** Wir zeigen per Induktion, dass die $n$-te Ableitung von $f$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!x^{-2-n}$$

ist:

- Induktionsanfang: $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2} = (-1)^0(1+0)!x^{-2-0}$
- Induktionsschritt: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = ((-1)^n(1+n)!x^{-2-n})' = (-1)^n(1+n)!(-2-n)x^{-2-n-1} = (-1)^{n+1}(2+n)!x^{-2-(n+1)}$

Damit ist bewiesen, dass $f^{(n)}(-1) = (-1)^n(n+1)!(-1)^{-2-n} = (n+1)!$. Somit ist die Taylorreihe von $f$ in $-1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$$

**Aufgabe 2:** $f'(t) = (6t+6, 8t+8)$, also ist $f$ stetig differenzierbar. Daraus folgt, dass $f$ rektifizierbar ist mit Länge:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|f'(t)\|\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sqrt{(6t+6)^2+(8t+8)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(36+64)(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{100}\cdot\sqrt{(t+1)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 10|t+1|\mathrm{d}t = \int_0^1 (10t+10)\mathrm{d}t \\
&= 5t^2+10t\Big|_0^1 = 15
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** Der Gradient $\mathrm{D}f(x,y) = (3x^2-1, 3y^2-1)$ ist null genau dann, wenn $3x^2 = 1$ und $3y^2 = 1$, wenn also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. $f$ kann dann höchstens in den dadurch gegebenen vier Punkten ein lokales Extremum haben. Die Hesse-Matrix von $f$ im Punkt $(x,y)$ ist:

$$\mathrm{Hess}f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Falls $x$ und $y$ unterschiedliches Vorzeichen haben, ist diese indefinit, da dann ihre Determinante $36xy$ negativ ist. Folglich hat $f$ in den Punkten $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ keine lokalen Extrema.

Im Punkt $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ist die Determinante positiv und der linke obere Eintrag der Matrix ebenfalls, also ist $\mathrm{Hess}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ positiv definit. Das heißt, $f$ hat in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ein lokales Minimum.

Im Punkt $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hat die Hesse-Matrix ebenfalls eine positive Determinante, aber der linke obere Eintrag ist negativ. Also ist $\mathrm{Hess}f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ negativ definit und $f$ hat in $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ein lokales Maximum.

**Aufgabe 4:** In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist $f$ stetig partiell differenzierbar, also insbesondere differenzierbar, denn

$$\mathrm{D}_1 f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{D}_2 f(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Wir zeigen, dass $f$ auch im Nullpunkt differenzierbar ist mit Ableitung null. Hierfür müssen wir nachrechnen, dass die Abbildung $r$, die durch

$$f(x,y) = f(0,0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (x,y) + r(x,y)\|(x,y)\|$$

und $r(0,0) = 0$ definiert ist, in $(0,0)$ stetig ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|r(x,y)\| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\| f(x,y) - f(0,0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (x,y) \right\|}{\|(x,y)\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\|(x,y)\|^2}}}{\|(x,y)\|} \\
&= \lim_{s\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{s^2}}}{s} = \lim_{s\searrow 0} \frac{1}{s e^{\frac{1}{s^2}}} \leq \lim_{s\searrow 0} \frac{1}{s\left(1+\frac{1}{s^2}\right)} = \lim_{s\searrow 0} \frac{s}{s^2+1} = 0
\end{aligned}$$

Also ist $r(0,0) = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} r(x,y)$.

**Aufgabe 5:** Die Jacobi-Matrix

$$\mathrm{D}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

von $f$ in $(x,y) \neq (0,0)$ hat Determinante $-4y^2 - 4x^2 < 0$, ist also invertierbar. Damit hat nach dem lokalen Umkehrsatz der Punkt $(x,y)$ eine Umgebung, in der die Funktion $f$ umkehrbar ist.

**Aufgabe 6:** Als Differenz zweier stetiger Funktionen ist die durch $g(x) = f(x) - x$ definierte Funktion ebenfalls stetig, und die angegebene Menge ist genau das Urbild von $(0, \infty)$ unter $g$, denn $f(x) > x$ ist äquivalent mit $g(x) > 0$. Die Menge $(0, \infty)$ ist aber offen, und da $g$ stetig ist, muss ihr Urbild ebenfalls offen sein.