LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Andreas Fackler

25. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1: $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, also ist f stetig differenzierbar und damit rektifizierbar mit der folgenden Länge:

$$\int_0^1 \|f'(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+1} \mathrm{d}t = \sqrt{2}$$

Aufgabe 2: Da f stetig partiell differenzierbar ist, ist f total differenzierbar und die Einträge der Jacobi-Matrix sind genau die partiellen Ableitungen $\mathrm{D}_j f_i(x, y, z)$:

$$\mathrm{D}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin y \cos z & x \cos y \cos z & -x \sin y \sin z \\ \sin y \sin z & x \cos y \sin z & x \sin y \cos z \\ \cos y & -x \sin y & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Sowohl die Funktion $g_1(x) = f(x, 0) = 0$, als auch $g_2(y) = f(0, y) = 0$ ist in 0 differenzierbar, also existieren beide partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$. Sei jedoch $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ für $n \geq 1$. Dann ist zwar $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \neq f(0, 0),$$

also ist f in $(0, 0)$ nicht stetig.

Aufgabe 4: Es genügt zu zeigen, dass f stetig partiell differenzierbar ist. Genau wie in Aufgabe 3 sind auch hier die partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ gleich 0. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt aber:

$$\mathrm{D}_1 f(x, y) = \frac{6x^5y^6(x^2 + y^2) - 2xx^6y^6}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(4x^2 + 6y^2)x^5y^6}{(x^2 + y^2)^2}$$

In allen Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $\mathrm{D}_1 f$ also stetig. Wegen $|x| \leq \|(x, y)\|$ und $|y| \leq \|(x, y)\|$ ist

$$\|\mathrm{D}_1 f(x, y)\| = \frac{\|(4x^2 + 6y^2)x^5y^6\|}{\|(x, y)\|^4} \leq \frac{10\|(x, y)\|^2\|(x, y)\|^5\|(x, y)\|^6}{\|(x, y)\|^4} = 10\|(x, y)\|^9$$

und damit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{D}_1 f(x, y) = (0, 0)$, also ist $\mathrm{D}_1 f$ auch in 0 stetig. Ganz genauso (die Situation ist symmetrisch in x und y) zeigt man, dass $\mathrm{D}_2 f$ stetig ist.