LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler, Parmenides Garcia Cornejo

Sommersemester 2010
13. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungen Übungsblatt 8 (Probeklausur)

Lösung Aufgabe 1.

Die k-te Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist
$f^{(k)} = (-1)^k (k!) x^{-(k+1)}$.

Beweis nach Induktion:

Fall $k=0$. $f(x) = f^{(0)}(x) = x^{-1} = (-1)^0 (0!) x^{-(0+1)}$;

Fall $k = n+1$.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}}{dx}(x) \underset{\mathrm{IV}}{=} \frac{d}{dx}(-1)^n (n!) x^{-(n+1)} = (-1)^n (n!) \cdot (-(n+1)) x^{-(n+1)-1} = \\ = (-1)^{n+1} ((n+1)!) x^{-((n+1)+1)}.$$

Deswegen die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 1 ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k!) (1)^{-(k+1)}}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$$

Bemerkung: Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}$ für jede $|y| < 1$. Deswegen, für $|1-x| < 1$ (d.h. $x \in (0,2)$) die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = f(x)$.

Lösung Aufgabe 2.

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $F := \{x \in X \,|\, f(x) = x\}$ so dass $y_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y \in X$.

Sei d die Metrik von X.

Wir zeigen zuerst, dass $\forall \varepsilon > 0 . d(f(y), y) < \varepsilon$. (*)

Sei $\varepsilon > 0$. Da $y_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y$ und f stetig ist, dann $\underset{n\longrightarrow\infty}{\mathrm{Lim}} f(y_n) = f(y)$. Deswegen es existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geqslant N_1 . d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{3}$ und es existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geqslant N_2 . d(f(y_n), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$; so für $N := \max\{N_1, N_2\}$,
$\forall n \geqslant N . d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{3} \wedge d(f(y), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Daher, nach Dreiecksungleiuchung:

$$d(f(y), y) \leqslant d(f(y), f(y_N)) + d(f(y_N), y) = d(f(y), f(y_N)) + d(y_n, y) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Letztendlich, nach (*) folgt $d(f(y), y) = 0$. Also $f(y) = y$, da d eine Metrik ist. Dieses zeigt, dass $y \in F$. So F ist abgeschlossen.

Lösung Aufgabe 3.

(a) $\int_{-1}^{1} \|f'(t)\| dt = \int_{-1}^{1} ((\frac{e^t - e^{-t}}{2})^2 + 1^2)^{1/2} dt = \int_{-1}^{1} (\frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} + 1)^{1/2} dt =$

$= \int_{-1}^{1} (\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{4}{4})^{1/2} dt = \int_{-1}^{1} (\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4})^{1/2} dt = \int_{-1}^{1} (\frac{(e^t + e^{-t})^2}{2^2})^{1/2} dt =$

$= \int_{-1}^{1} |\frac{e^t + e^{-t}}{2}| dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^t + e^{-t} dt = \frac{1}{2}((e^t - e^{-t})|_{-1}^{1}) =$

$= \frac{1}{2}((e^1 - e^{-1}) - (e^{-1} - e^1)) = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1} - e^{-1} + e^1) = \frac{1}{2}(2e - 2e^{-1}) = e - e^{-1}.$

(b) $\int_{0}^{1} \|f'(t)\| dt = \int_{0}^{1} (((t+1)^{1/2})^2 + 1^2)^{1/2} dt = \int_{0}^{1} (|t+1| + 1)^{1/2} dt =$

$= \int_{0}^{1} (t+2)^{1/2} dt = (\frac{2}{3}(t+2)^{3/2})_0^1 = \frac{2}{3}(3)^{3/2} - \frac{2}{3}(2)^{3/2}.$

Lösung Aufgabe 4.

In dieser Aufgabe, gegeben eine Menge A, wenn wir schreiben $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, wir meinen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is eine Folge so dass $\forall n \in \mathbb{N}. r_n \in A$.

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I := \{f(t) | t \in [0, \infty)\}$, so dass $\operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty} y_n = y \in \mathbb{R}^2$. Dann $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Auf der andere Seite, da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$, dann für jede $n \in \mathbb{N}$, es existiert $x_n \in [0, \infty)$ so dass $y_n = f(x_n)$. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ auch beschränkt: Unsere Annahme $\operatorname*{Lim}_{t\longrightarrow\infty} \|f(t)\| = \infty$ kann man schreiben als $\forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 1). z_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty \Longrightarrow \|f(z_n)\| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty$, was äquivalent zum $\forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 1). \|f(z_n)\| \underset{n\longrightarrow\infty}{\not\rightarrow} \infty \Longrightarrow z_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\not\rightarrow} \infty$ ist.

Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nach irgendeine $x \in [0, \infty)$ konvergiert (solche Teilfolge existiert, da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, 1)$ beschränkt ist). Da f stetig ist, dann $\operatorname*{Lim}_{k\longrightarrow\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Aber $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und da $\operatorname*{Lim}_{n\longrightarrow\infty} y_n = y$, dann $\operatorname*{Lim}_{k\longrightarrow\infty} f(x_{n_k}) = y$ auch. So $y = f(x) \in I$. Also I ist abgeschlossen.