Andreas Fackler 28. Mai 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Eine Menge ist offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Wir müssen also zeigen, dass für jedes $x \in U \cap V$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die ε-Umgebung $\mathbf{U}_\varepsilon(x)$ von x eine Teilmenge von $U \cap V$ ist.

Sei also $x \in U \cap V$ gegeben. Dann ist insbesondere $x \in U$, und da U offen ist, ist U Umgebung von x. Das heißt, es gibt ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass $\mathbf{U}_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$. Ebenso gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$ mit $\mathbf{U}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq V$. Setze nun $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Dann gilt $\varepsilon > 0$ und

$$\mathbf{U}_\varepsilon(x) = \mathbf{U}_{\varepsilon_1}(x) \cap \mathbf{U}_{\varepsilon_2}(x) \subseteq U \cap V,$$

die ε-Umgebung von x ist also Teilmenge von $U \cap V$.

Aufgabe 2: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^3$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $b \in \mathbb{R}^3$, wenn für jedes $l \in \{1, 2, 3\}$ die Folge $(a_{nl})_{l\in\mathbb{N}}$ der l-ten Komponenten gegen b_l konvergiert. Wir betrachten also zunächst die Folgen der Komponenten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\
\lim_{n\to\infty} a_{n2} &= \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \\
\lim_{n\to\infty} a_{n3} &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right) = \cos(0) = 1
\end{aligned}$$

(Da der Kosinus stetig ist, dürfen cos und lim vertauscht werden.) Insgesamt erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (0, 2, 1)$$

Aufgabe 3: Wir zeigen zunächst die Implikation von links nach rechts, nehmen also an, die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt. Das heißt, es gibt ein $b \in \mathbb{R}^n$ und ein $r > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $a_k \in \mathbf{U}_r(b)$. Wir zeigen unter dieser Voaussetzung für jedes $1 \le l \le n$, dass die Folge $(a_{kl})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Genauer zeigen wir, dass die Folge in dem Intervall $\mathbf{U}_r(b_l) = (b - r, b + r)$ liegt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist nämlich:

$$|a_{kl} - b_l| = \sqrt{(a_{kl} - b_l)^2} \le \sqrt{\sum_{m=1}^{n} (a_{km} - b_m)^2} = \|a_k - b\| < r$$

Um auch die Implikation in entgegengesetzte Richtung zu zeigen, nehmen wir nun an, für alle $1 \leq l \leq n$ sei die Folge $(a_{kl})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es gebe also jeweils ein $r_l > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_{kl}| < r_l$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\|a_k\| = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} a_{kl}^2} \leq \sqrt{\sum_{l=1}^{n} r_l^2}$$

Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegt also komplett in der r-Umgebung $\mathbf{U}_r(0)$ von 0, mit $r = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} r_l^2}$.

Aufgabe 4: Es ist zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq m$ gilt: $d(a_n, a) < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m$ gilt: $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da a Häufungspunkt der Folge ist, gibt es ein $k \geq m$ mit $d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{3}$. Insgesamt erhalten wir damit für jedes $n \geq m$ die Abschätzung:

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, a_k) + d(a_k, a) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$