Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler, Parmenides Garcia Cornejo

Sommersemester 2010
15. Mai 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungen Übungsblatt 4

Lösung Aufgabe 1.

Da

$f(x) = e^{\cos(x)}$

$f'(x) = e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\sin(x) e^{\cos(x)}$

$$f''(x) = (-\cos(x)) e^{\cos(x)} + (-\sin(x) e^{\cos(x)})) \cdot (-\sin(x)) = \\ = -\cos(x) e^{\cos(x)} + \sin^2(x) e^{\cos(x)},$$

dann

$f(0) = e$

$f'(0) = 0$

$f''(0) = -e.$

Deswegen das zweite Taylorspolynom von f mit Entwicklungspunkt 0 ist:

$$\Sigma_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + f'(0)\frac{(x-0)}{1!} + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2!} = e - e\frac{x^2}{2!}$$

Lösung Aufgabe 2.

Die k-te Ableitung der Funktion $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ ist
$f^{(k)} = (-1)^k (k!) x^{-(k+1)}$.

Beweis nach Induktion:

Fall $k = 0$. $f(x) = f^{(0)}(x) = x^{-1} = (-1)^0 (0!) x^{-(0+1)}$;

Fall $k = n+1$.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{df^{(n)}}{dx}(x) \underset{\mathrm{IV}}{=} \frac{d}{dx}(-1)^n (n!) x^{-(n+1)} = (-1)^n (n!) \cdot (-(n+1)) x^{-(n+1)-1} = \\ = (-1)^{n+1}((n+1)!) x^{-((n+1)+1)}.$$

Deswegen die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 1 ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k!)(1)^{-(k+1)}}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k(x-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k$$

Auf der andere Seite, wir wissen aus der Analysis I Vorlesung, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}$ für jede $|y| < 1$. Deswegen, für $|1-x| < 1$ (d.h. $x \in (0,2)$) die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)^k = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} = f(x)$.

Lösung Aufgabe 3.

Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ni (y_1, y_2) = y$ und $l \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann

(1) $\|x\|^* = 0 \Longleftrightarrow |x_1| + \frac{1}{2}|x_2| = 0 \Longleftrightarrow |x_1| = 0 = \frac{1}{2}|x_2| \Longleftrightarrow x_1 = 0 = x_2 \Longleftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^2$.

(2) $\|lx\|^* = \|(lx_1, lx_2)\|^* = |lx_1| + \frac{1}{2}|lx_2| = |l|(|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|) = |l|\|x\|^*$.

(3) $\|x+y\|^* = \|(x_1+y_1, x_2+y_2)\|^* = |x_1+y_1| + \frac{1}{2}|x_2+y_2| \leqslant$
(Dreiecksungleichung für $|\ |$)
$\leqslant (|x_1| + |y_1|) + \frac{1}{2}(|x_2| + |y_2|) = \ldots = (|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|) + (|y_1| + \frac{1}{2}|y_2|) =$
$= \|x\|^* + \|y\|^*$.

Deshalb $\|x\|^*$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^2$.

Lösung Aufgabe 4.

Sei $x, y \in V$.

Man beachte, dass $\|x\| = \|x + y - y\| \leqslant \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|$; deswegen $\|x\| - \|y\| = \|x + y - y\| \leqslant \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\|$. (*)

Auf der andere Seite, $\|y\| = \|y + x - x\| \leqslant \|y + x\| + \|-x\| = \|x + y\| + \|x\|$; deswegen $-\|x+y\| \leqslant \|x\| - \|y\|$. (**)

Nach (*) und (**) folgt $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\|$.