LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides Garcia Cornejo, Andreas Fackler

Sommersemester 2010
26. April 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungen Übungsblatt 2

Lösung Aufgabe 1.

$\int_l^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}dx = \operatorname*{Lim}_{a\longrightarrow\infty}(-\frac{1}{\ln(x)})_l^a = \operatorname*{Lim}_{a\longrightarrow\infty} -\frac{1}{\ln(a)} - (-\frac{1}{\ln(l)}) = \frac{1}{\ln(l)}$.

Lösung Aufgabe 2.

$\Longrightarrow$). Nehmen wir an $\int_a^\infty f dx = \operatorname*{Lim}_{c\longrightarrow\infty}\int_a^c f dx = k$ existiert.

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $b \in \mathbb{R}$, $b \geqslant a$ so dass $\forall c \geqslant b. |\int_a^c f dx - k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Deswegen $|\int_b^c f dx| = |(\int_a^b f dx + \int_b^c f dx) - \int_a^b f dx| = |\int_a^c f dx - \int_a^b f dx| = |\int_a^c f dx - k + (-\int_a^b f dx + k)| \leqslant |\int_a^c f dx - k| + |\int_a^b f dx - k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $c \geqslant b$.

$\Longleftarrow$). Nehmen wir an, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $b \geqslant a$ existiert mit $|\int_b^c f dx| < \varepsilon$, für alle c mit $b \leqslant c$.

Es sei $c_n := \int_a^{a+n} f dx$, mit $n \in \mathbb{N}$. Nach unsere voraussetzung folg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge. Dann $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach irgend eine $k \in \mathbb{R}$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N' \in \mathbb{N}$ so dass $|c_n - k| < \varepsilon/3$ fuer alle $n \geqslant N'$; ausserdem, es existiert $b' \geqslant a$ so dass $|\int_{b'}^c f dx| < \varepsilon/3$, für alle c mit $b' \leqslant c$. Es sei $N := \min\{n \in \mathbb{N} | N \leqslant n \geqslant b'\}$. Dann fuer beliebig $c \geqslant N$:

$|\int_a^c f dx - k)| = |\int_a^N f dx + \int_N^c f dx + \int_{b'}^N f dx - \int_{b'}^N f dx - k| =$

$|\int_a^N f dx - k + \int_{b'}^c f dx - \int_{b'}^N f dx| \leqslant |\int_a^N f dx - k| + |\int_{b'}^c f dx| + |\int_{b'}^N f dx| \leqslant$

$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$.

Lösung Aufgabe 3.

Wir zeigen für alle $\varepsilon > 0$ existiert $b \geqslant a$ mit $|\int_b^c f dx| < \varepsilon$ für alle c mit $b \leqslant c$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\int_a^\infty |f| dx$ konvergiert, es existiert $b \geqslant a$ mit $|\int_b^c |f| dx| < \varepsilon$ für alle c mit $b \leqslant c$. Da $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ gilt, dann

$-\varepsilon < -|\int_b^c |f|dx| = \int_b^c |f|dx \leqslant \int_b^c fdx \leqslant \int_b^c |f|dx = |\int_b^c |f|dx| < \varepsilon$ fuer jede $c \geqslant \beta$. Daher $|\int_b^c fdx| < \varepsilon$ fü alle $c \geqslant b$.

Nach Aufgabe 2, $\int_a^\infty fdx$ ist konvergent.

Lösung Aufgabe 4.

Es sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 1 \\ 1 & \text{falls } x \in (0,1) \\ 1/2 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nehmen wir an $\varepsilon < 1/2$.

(1). Falls $x = 1$, dann $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2). Falls $x > 1$, dann $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n > \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1)}{\ln(x)}$.

(3). Es sei $x \in (0,1)$. Da $x^n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ gibt es $N(x) \in \mathbb{N}$ so dass $|x^n - 0| < \varepsilon/2$ für alle $n \geqslant N(x)$. Daraus folg dass $x^n < \varepsilon/2$ und $0 < 1 - \varepsilon < 1 + x^n$ für alle $n \geqslant N(x)$, und deswegen $\forall n \geqslant N(x).\ -\varepsilon < 0 < \frac{x^n}{1+x^n} < \frac{\varepsilon/2}{1-\varepsilon} \leqslant 2(\varepsilon/2) = \varepsilon$. Diese Ungleichungen zeigen dass $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{1}{1+x^n} - 1| = |\frac{x^n}{1+x^n}| < \varepsilon$ für jede $n \geqslant N(x)$.

(1), (2) und (3) zeigen dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise nach f konvergiert. Ausserdem, f_n konverigiert nicht gleichmässig nach f: Sei $\varepsilon = 1/3$ und es sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig.

Man beachte dass für jede $x \in (1, \infty)$ und jede $n \in \mathbb{N}$,
$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < x^n \Longleftrightarrow \ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1) < \ln(x^n) = n\ln(x)$
$\Longleftrightarrow \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1)}{\ln(x)} < n$. Da $\ln(x) \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$ und $0 < \ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$, dann $\frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1)}{\ln(x)}$ wächst umbeschränkt um 1. Dann es gibt $x_N \in (1, \infty)$ so dass $\frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon} - 1)}{\ln(x)} > N$. Also wir haben gezeigt $\varepsilon := 1/3. \forall N \in \mathbb{N}. \exists x_N \in (1, \infty). |f_N(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^N} \not< \varepsilon$, dass heisst, f_n konvergiert nicht gleichmässig gegen f.