Prof. Dr. H.-D. Donder
Andreas Fackler, Parmenides Garcia Cornejo

Sommersemester 2010
03. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Losungen der 2. Probeklausur.

Aufgabe 1.

Sei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann

$$D_1 f(x_1, x_2) = x_2 \tfrac{1}{2}(2x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}(4x_1) = \frac{2x_2x_1}{\sqrt{2x_1^2 + x_2^2}}; \qquad (1.1^*)$$

$$\begin{aligned} D_2 f(x_1, x_2) &= \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} + x_2 \tfrac{1}{2}(2x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}(2x_2). \\ &= \sqrt{2x_1^2 + x_2^2} + \frac{2x_2^2}{\sqrt{2x_1^2 + x_2^2}} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{2x_1^2 + x_2^2}}. \qquad (1.2^*) \end{aligned}$$

Ausserdem,

$$D_1 f(0,0) = \operatorname*{Lim}_{0 \neq h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \operatorname*{Lim}_{0 \neq h \longrightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0; \qquad (1.3^*)$$

$$D_2 f(0,0) = \operatorname*{Lim}_{0 \neq h \longrightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \operatorname*{Lim}_{0 \neq h \longrightarrow 0} \frac{h|h| - 0}{h} = 0. \qquad (1.4^*)$$

Nach (1.1*) und (1.2*) folgt dass f stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$ ist. Es bleibt nur zu zeigen, dass $D_1 f$ und $D_2 f$ auch in $(0,0)$ stetig sind:

Für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$:

$$\left|\frac{2x_2x_1}{\sqrt{2x_1^2 + x_2^2}}\right| \leqslant \begin{cases} \left|\frac{2x_2x_1}{\sqrt{2x_1^2}}\right| \leqslant 2|x_2| & \text{falls } x_1 \neq 0 \\ \\ \left|\frac{2x_2x_1}{\sqrt{x_2^2}}\right| \leqslant 2|x_1| & \text{falls } x_2 \neq 0 \end{cases}; \text{ daher } \operatorname*{Lim}_{(0,0) \neq (x_1,x_2) \longrightarrow 0} D_1 f(x,y) = 0. \qquad (1.5^*)$$

$$\left|\frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{2x_1^2 + x_2^2}}\right| \leqslant \left|\frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \text{ daher } \operatorname*{Lim}_{(0,0) \neq (x_1,x_2) \longrightarrow 0} D_2 f(x,y) = 0. \qquad (1.6^*)$$

Nach (1.3*), (1.4*), (1.5*) und (1.6*) folgt die Stetigkeit der partielle ableitungen $D_1 f$ und $D_2 f$ in $(0,0)$. Also f ist dann stetig differenzierbar.

Aufgabe 2.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \nabla f(x, y) = (2x - 2y, -2x + 4y)$.

So $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow (2x - 2y, -2x + 4y) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Also f hat höchstens ein lokales Extremun in $(0, 0)$. Wir zeigen dass $(0, 0)$ ein lokales Minimum von f ist:

Da $\text{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $2 > 0$ und $\det(\text{Hess} f(0, 0)) = 8 - 4 = 4 > 0$, dann ist Hess $f(0,0)$ positiv definit. Deshalb ist $(0,0)$ lokales Minimum von f.

Aufgabe 3.

$\forall (x, y) \in K$, $\nabla f(x, y) = (8x - 3y, -3x)$. So $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0)$. Daher der einzige mögliche lokales Maximum oder Minimum vo f ist $(0, 0)$. Aber $\text{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ für beliebige $(x, y) \in K$. Somit $\det(\text{Hess} f(0, 0)) = 8 \cdot 0 - (-3 \cdot (-3)) = -9 < 0$. Also Hess $f(0, 0)$ ist indefinit und deswegen $(0, 0)$ ist weder Maximum noch Minimum von f.

Aufgabe 4.

Seien $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(x_1, x_2) := x_1 x_2^2$ und $f_2(x_1, x_2) := x_1^{x_2}$.

Dann

$D_1 f_1(x_1, x_2) = x_2^2$, $D_2 f_1(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$,

$D_1 f_2(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \frac{x_2}{x_1} = x_2 x_1^{x_2 - 1}$ und $D_2 f_1(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \cdot \log(x_1)$ und deswegen f ist stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ (und $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ist offen). (*)

Ausserdem $(1, 2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $D f(1, 2) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(1, 2) & D_2 f_1(1, 2) \\ D_1 f_2(1, 2) & D_2 f_2(1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar. (**)

Nach (*), (**) und der Umkehrsatz, es existiert eine offene Umgebung
$V \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ von $(1, 2)$ so dass f invertierbar in V ist.