LMU München, Germany • Elias Haslauer

Sobolevräume und Poincaré-Ungleichung

Seminar Numerische Analysis bei
Prof. Lars Diening
Wintersemester 2014/2015

Die Funktionenräume L^p

Definition

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

$$L^p(G) := \{u : G \to \mathbb{R} \mid u \text{ Lebesgue-messbar}, ||u||_{L^p(G)} < \infty\}$$

$$||u||_{L^p(G)} := \left(\int_G |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p < \infty$$

$$||u||_{L^\infty(G)} := \inf_{N \subset G \text{ N Nullmenge}} \sup_{x \in G \setminus N} |u(x)| \qquad p = \infty$$

Schwache Ableitungen

Definition

Sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(G)$ besitzt die *schwache Ableitung* $v_\alpha \in L^1_{loc}(G)$, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(G)$ gilt:

$$\int_G uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_G v_\alpha\varphi$$

Man schreibt $v_\alpha = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Dabei ist $L^p_{loc}(G) = \{u : G \to \mathbb{R} \mid \forall G' \subset\subset G, \text{ offen: } u|_{G'} \in L^p(G')\}$,
$C_0^\infty(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \textit{supp } \varphi \text{ kompakt und Teilmenge von } G\}$

Soboleväume

Definition

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$.

$$H^{m,p}(G) := \{u \in L^p(G) \mid u \text{ besitzt schwache Ableitungen } D^\alpha u \in L^p(G) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

$$||u||_{H^{m,p}(G)} := \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} ||D^\alpha u||_{L^p(G)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad p < \infty$$

$$||u||_{H^{m,\infty}(G)} := \max_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(G)} \qquad p = \infty$$

Alternative Definitionen

Früher: Zwei verschiedene Definitionen von Sobolevräumen:

- im obigen Sinn als Räume von Funktionen mit schwachen Ableitungen ($W^{m,p}$)
- als Abschluss von $\overline{C^\infty \cap W^{m,p}}^{||W^{m,p}||}$ ($H^{m,p}$)

$\Longrightarrow$ Meyers und Serrin, 1964: H=W

Poincaré-Ungleichung: Allgemeine Formulierung

Satz

Sei $1 \leq p \leq \infty$, G eine konvexe beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $u \in H^{1,p}(G)$. Dann existiert eine nur von p und G abhängige Konstante C, so dass

$$||u - \bar{u}_G||_{L^p(G)} \leq C||\nabla u||_{L^p(G)}.$$

Dabei sei $\bar{u}_G = \frac{1}{|G|}\int_G u(x)dx$.

Wir untersuchen im Folgenden ausschließlich Fälle mit $\bar{u}_G = 0$.

Poincaré-Ungleichung für einen n-dimensionalen Würfel

Sei $G = (0, d)^n$. Dann gilt für alle $v \in H_0^{1,p}(G)$

$$||v||_{L^p(G)} \leq d||\nabla v||_{L^p(G)}.$$

Beweis: Es reicht aus, die Ungleichung für $v \in C_0^1(G)$ zu beweisen, denn da $C_0^1(G)$ in $H_0^{1,p}(G)$ dicht liegt, existiert eine Cauchy-Folge $v_i \subset C_0^1(G)$, $||v - v_i||_{H^{1,p}(G)} \to 0$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} ||v||_{L^p(G)} &\leq ||v_i||_{L^p(G)} + ||v_i - v||_{L^p(G)} \leq d||\nabla v_i||_{L^p(G)} + ||v_i - v||_{L^p(G)} \\ &\leq d||\nabla v||_{L^p(G)} + d||\nabla (v_i - v)||_{L^p(G)} + ||v_i - v||_{L^p(G)} \\ &\longrightarrow d||\nabla v||_{L^p(G)} \end{aligned}$$

Für $v \in C_0^1(G)$ definiere $\bar{v}(X) := \begin{cases} v(x) & x \in G \\ 0 & x \notin G \end{cases}$.

Es folgt

$$\bar{v}(x_1, ..., x_n) = \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{v}(s, x_2, .., x_n) ds.$$

Wähle $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann folgt mit der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\bar{v}(x_1, ..., x_n)|^p &\leq \left(\int_0^{x_1} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{v}(s, x_2, ..., x_n) \right| ds \right)^p \\ &\leq d^{\frac{p}{q}} \int_0^d \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{v}(s, x_2, ..., x_n) \right|^p ds \end{aligned}$$

Integration beider Seiten nach x_1:

$$\int_0^d |\bar{v}(x_1, ..., x_n)|^p dx_1 \leq d^{\frac{p}{q}+1} \int_0^d \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{v}(s, x_2, ..., x_n) \right|^p ds$$

Integration in restliche Koordinatenrichtungen:

$$\Rightarrow \int_G |\bar{v}(x_1, ..., x_n)|^p \, dx \leq d^{\frac{p}{q}+1} \int_G \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{v}(x_1, ..., x_n) \right|^p dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(\int_G |v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq d \left(\int_G \left| \frac{\partial}{\partial x_1} v(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lemma

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet mit $d(G) = \sup_{x,y\in G} |x-y|$ und sei $u \in C^1(G)$ wobei $\int_G u = 0$. Dann gilt für $x \in G$:

$$|u(x)| \leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy$$

falls $\frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy < \infty$

Beweis: Für $x, y \in G$, $x \neq y$ sei $z(t) := x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
u(x) - u(y) &= u(z(0)) - u(z(1)) = -\int_0^1 \frac{d}{dt} u(z(t))dt \\
&= -\int_0^1 \nabla u(x + t(y-x)) \cdot (y-x)dt \\
s := |y-x|t \Rightarrow &= -\int_0^{|y-x|} \nabla u \left(x + s\frac{y-x}{|y-x|} \right) \cdot \frac{y-x}{|y-x|} ds \\
\xi := \frac{y-x}{|y-x|} \Rightarrow &= -\int_0^{|x-y|} \frac{d}{ds} u(x + s\xi) ds
\end{aligned}$$

Integriere bezüglich y, dann folgt mit $\int_G u(y)dy = 0$, $\int_G dx = |G|$:

$$u(x) = -\frac{1}{|G|}\int_G \int_0^{|x-y|} \frac{d}{ds}u(x+s\xi)dsdy$$

$$|u(x)| \leq \frac{1}{|G|}\int_{\{y,\ |y-x|<d(G)\}} \int_0^{|x-y|} \left|\frac{d}{ds}u(x+s\xi)\right| dsdy$$

$$\leq \frac{1}{|G|}\int_{B_{d(G)}(x)} \int_0^{\infty} \left|\frac{d}{ds}u(x+s\xi)\right| dsdy$$

$$= \frac{1}{|G|}\int_0^{\infty} \int_0^{d(G)} \int_{S^{n-1}} \left|\frac{d}{ds}u(x+s\xi)\right| r^{n-1} do(\xi)drds$$

$$\leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \left| \frac{d}{ds} u(x+s\xi) \right| do(\xi) ds$$

$$= \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \left| \frac{d}{ds} u(x+s\xi) \right| \frac{s^{n-1}}{s^{n-1}} do(\xi) ds$$

$$= \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \frac{d}{ds} u(z) \right|}{|z-x|^{n-1}} dz$$

$$= \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz$$

Lemma

Zu jedem konvexen beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Konstante c, so dass für alle $u \in H^{1,p} \cap C^1(G)$ mit $\int_G U = 0$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt:

$$||u||_{L^p(G)} \leq c||\nabla u||_{L^p(G)}.$$

Dabei ist

$$c \leq d(G)^{n+1} \frac{|S^{n-1}|}{n|G|}$$

Beweis: Aus dem ersten Lemma folgt:

$$||u||_{L^p(G)} = \left(\int_G |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{d(G)^n}{n|G|}\left(\int_G \left(\int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sei $p > 1$, dann gilt mit der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\int_G \left(\int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy\right)^p dx = \\
&= \int_G \left(\int_G |\nabla u(y)||y-x|^{\frac{1}{p}(1-n)}|y-x|^{\frac{1}{q}(1-n)} dy\right)^p dx \\
&\leq \int_G \int_G |\nabla u(y)|^p |y-x|^{1-n} dy \left(\int_G |y-x|^{1-n} dy\right)^{\frac{p}{q}} dx \quad (\star)
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\int_G |y-x|^{1-n} dy \leq \int_{B_{d(G)}(x)} |y-x|^{1-n} dy$$
$$= \int_0^{d(G)} \int_{S^{n-1}} r^{1-n+n-1} do(\xi) dr = d(G)|S^{n-1}|$$

Und damit:

$$(\star) \quad \leq (d(G)|S^{n-1}|)^{p-1} \int_G \int_G |\nabla u(y)|^p |y-x|^{1-n} dy dx$$
$$\leq (d(G)|S^{n-1}|)^{p} \int_G |\nabla u(y)|^p dy$$

Und damit folgt:

$$||u||_{L^p(G)} \leq \frac{d(G)^{n+1}}{n|G|} |S^{n-1}| ||\nabla u||_{L^p(G)}$$

Poincaré-Ungleichung

Satz

Zu jedem konvexen beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Konstante $c \leq d(G)^{n+1}\frac{|S^{n-1}|}{n|G|}$, so dass für alle $u \in H^{1,p}(G)$ mit $\int_G u = 0$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt:

$$||u||_{L^p(G)} \leq c||\nabla u||_{L^p(G)}.$$

Beweis: Folgt aus den beiden Lemmata zusammen mit der Tatsache, dass

$$\overline{H^{1,p}(G) \cap C^1(G)}^{||H^{1,p}||} = H^{1,p}$$

Literatur

- Dobrowolski, Manfred: Angewandte Funktionalanalysis, Berlin 2010
- Dziuk, Gerhard: Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, Berlin 2010
- Königsberger, Konrad: Analysis 2, Berlin 2002
- Meyers, Norman und Serrin, James: H=W, in: PNAS, Juni 1964, 51(6): 1055f. (auch: http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC300210/pdf/pnas00180-0073.pdf)