Prof. Dr. Dominic Breit

Sobolev-Räume

Wintersemester 2013/2014

Ludwig-Maximilians Universität
Mathematisches Institut
Theresienstraße 39
80333 München

Inhaltsverzeichnis

1 Lebesgue–Räume **7**

2 Schwache Konvergenz **25**

3 Schwache Differenzierbarkeit **35**

4 Glättungen und Approximationssätze für Sobolev–Funktionen **53**

5 Einbettungssätze **69**

6 Punktweise Eigenschaften und Randverhalten **81**

7 Fraktionale Sobolev-Räume **89**

Literatur **97**

Einleitung

Viele Fragestellungen aus Physik, Technik oder den Wirtschaftswissenschaften sowie innermathematischer Disziplinen (Geometrie, partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung etc.) führen auf unendlichdimensionale Extremwertaufgaben, bei denen es darum geht, in einer Klasse von möglichen „Zuständen“ jenen mit minimaler „Energie“ zu bestimmen, wobei die „Energie“ durch ein Funktional repräsentiert wird. Um nur ein einfaches Beispiel zu nennen, betrachte man das Problem ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$)

$$I[u] := \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \longrightarrow \min .$$

Physikalisch beschreibt dies u.a. das elektrische Potential $u :\to \mathbb{R}$ in einem ladungsfreien Raum (dabei repräsentiert obiges Integral die elektrische Energie).
Mit der direkten Methode der Variationsrechnung lässt sich die Existenz einer eindeutigen distributionellen (verallgemeinerten) Lösung von Variationsproblemen dieser Form zeigen (bei Vorgabe von Randwerten). Hierbei handelt es sich um eine Sobolev-Funktion, die a priori im analytischen Sinn sehr schlecht Eigenschaften hat (es gibt Beispiele, die nirgends stetig sind). Um das Wohlverhalten solcher Lösungen zu studieren, sind tiefgreifende Kenntnisse über Sobolev-Funktionen notwendig. Aber auch für viele numerische Anwendungen sind solche Kenntnisse von großem Vorteil.
Die folgenden drei Problemstellungen stehen dabi im Vordergrund:

- Glatte Approximation von Sobolev-Funktionen:
  Sobolev-Funktionen können durch C^∞-Funktionen approximiert werden. Daher können Eigenschaften von Sobolev-Funktionen bewisen werden, indem man sie zunächst für glatte Funktionen verifiziert, approximiert und dann zur Grenze übergeht. Dies ist u.a. nützlich um Rechenregeln für Sobolev-Funktionen zu beweisen.

- Einbettungssätze:
  Sobolev-Funltionen weisen a priori höhere Integrabilitätseigenschaften auf (die von der Dimension des Raums abhängen): Beispielsweise gilt im Fall $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dass u zum Raum $L^t(\Omega)$ für alle $t < \infty$ gehört (aus $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p > 2$ folgt hier sogar Stetigkeit von u).

- Randverhalten:
  Für eine Funktion $u \in L^p(\Omega)$ können Randwerte nicht sinnvoll definiert werden, da $\partial\Omega$ eine Lebesgue-Nullmenge ist und L^p-Funktionen nur f.ü. eindeutig definiert sind. Beim Studium von Sobolev-Funktionen zeigt sich jedoch, dass dem Ausdruck $u_{|\partial\Omega}$ eine natürlich Bedeutung zukommt.

Nachdem obige Aussagen hergeleitet wurden, sind schließlich die Vorbereitungen getroffen um Regularitätstheorie zu betreiben. D.h. man geht der Frage nach, ob bzw.

unter welchen Bedingungen verallgemeinerten Lösungen (von Variationsproblemen oder partiellen Differentialgleichungen) — welche a priori noch nicht einmal stetig sind — tatsächlich bessere Eigenschaften haben, oder sogar klassische Lösungen produzieren.

Warnung.
Dieses Skript dient als ergänzendes Begleitmaterial zur Vorlesung. Es kann und soll den Besuch sowie eine Mitschrift der Vorlesung nicht ersetzen, und erhebt keinen Anspruch auf Fehlerfreiheit oder Vollständigkeit.

Kapitel 1

Lebesgue–Räume

Wir vereinbaren zunächst einige Sprechweisen, welche aus der elemtaren Maßtheorie bekannt sind.
Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und sei $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ ein Maßüber X (wobei $\mathscr{P}(X)$ wie üblich die Potenzmenge von X bezeichnet), d. h. μ hat die Eigenschaft:

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

für alle $A, A_n \in \mathscr{P}(X)$ mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Nach *Carathéodory* heißt eine Menge $A \in \mathscr{P}(X)$ *μ–messbar*, falls für jedes $B \in \mathscr{P}(X)$ gilt:

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Eine Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *μ–messbar*, falls das Urbild $u^{-1}(I)$ eines jeden Intervalls $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine *μ–messbare* Menge ist.[1]
Sei E eine Eigenschaft von Funktionen. Wir sagen, u habe *μ–fast–überall* (kurz: μ–f. ü.) auf X die Eigenschaft E, falls die Menge

$$N := \big\{x \in X;\ u(x) \text{ erfüllt nicht } E\big\}$$

eine μ–Nullmenge, also $\mu(N) = 0$ ist. Wir sagen auch, u habe in *μ–fast–allen* (kurz: μ–f. a.) Punkten $x \in X$ die Eigenschaft E.
Zwei Funktionen $u, w : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind demnach μ–f. ü. identisch auf X, falls

$$\mu\big(\big\{x \in X;\ u(x) \neq w(x)\big\}\big) = 0$$

ist. Beispielsweise ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ bzgl. dem eindimensionalen Lebesgue–Maß$\mathcal{L}^1$ f. ü. auf $\mathbb{R}$ identisch der Nullfunktion.

In diesem § wird uns die Frage beschäftigen, wie man integrierbare Funktionen $X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu einem normierten Raum — welcher sinnvollerweise ein Banach–Raum sein sollte — zusammenfassen kann.

[1] Ein (verallgemeinertes) Intervall in $\overline{\mathbb{R}}$ ist ein Intervall, bei dem auch die unenlich fernen Punkte $\pm\infty$ als Grenzen zugelassen sind (z. B. $(0, \infty]$, $[-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$).

Wir machen zunächst die vorläufige Definition: 1^{ter} **Versuch**

$$\mathscr{L}^1(X;\mu) := \left\{ u : X \to \overline{\mathbb{R}};\ u\ \mu\text{–messbar mit } \int_X \big|u(x)\big|\, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Wegen $\int_X \big|u(x)\big|\, d\mu(x) < \infty$ ist $\mu\big(\{x \in X;\ u(x) = \pm\infty\}\big) = 0$, d. h.

$$\|u\|_1 := \int_X \big|u(x)\big|\, d\mu(x)$$

ist eine wohldefinierte Größe.

Bemerkung 1.1.

i) Man will Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ zulassen um auch Funktionen mit Singularitäten zu betrachten. Beispielsweise überzeugt man sich leicht davon, dass die Abbildung $x \mapsto 1/\sqrt{|x|}$ zur Klasse $\mathscr{L}^1([-1,1];\mathcal{L}^1)$ gehört.

ii) Auch wenn die Funktion u auf X nur endliche Werte annimmt, muss $\|u\|_1$ nicht existieren. Man betrachte etwa $\mathscr{L}^1((0,1);\mathcal{L}^1)$ und die Abbildung $x \mapsto 1/x$.

Probleme.

i) Sind $u, w \in \mathscr{L}^1(X;\mu)$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist $u + cw$ eventuell auf einer μ–Nullmenge ein undefinierter Ausdruck wie z. B. „$\infty - \infty$“. Die Ursache dafür ist, dass wir Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ zulassen; $\mathscr{L}^1(X;\mu)$ hat also keine Vektorraum–Struktur.

Deshalb sei von nun an

$$\mathscr{L}^1(X;\mu) := \left\{ u : X \to \mathbb{R};\ u\ \mu\text{–messbar mit } \int_X \big|u(x)\big|\, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Dann ist $\mathscr{L}^1(X;\mu)$ ein linearer Raum, und nach den Rechenregeln für μ–messbare Funktionen ist

$$\|cu\|_1 = |c|\|u\|_1 \quad \text{und} \quad \|u + w\|_1 \le \|u\|_1 + \|w\|_1$$

für alle $u, w \in \mathscr{L}^1(X;\mu)$ und $c \in \mathbb{R}$. Folgendes Problem bleibt jedoch.

ii) Ist $u \in \mathscr{L}^1(X;\mu)$ mit $\|u\|_1 = 0$, so ist lediglich $u = 0$ μ–f. ü. auf X, d. h. es kann Punkte $x \in X$ geben mit $u(x) \neq 0$. (Man betrachte beispielsweise wieder die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ und $X := [0,1]$.)
Durch $\|\cdot\|_1$ wird demnach keine Norm auf $\mathscr{L}^1(X;\mu)$ erklärt, sondern eine sog. *Seminorm.*
Ist speziell $X := \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\mu := \mathcal{L}^d$ das d–dimensionale Lebesgue-Maß, so kann man die Definition von $\mathscr{L}^1$ nochmals modifizieren durch:

$$\mathscr{L}^1(\Omega) := \mathscr{L}^1(\Omega;\mathcal{L}^d) := \left\{ u \in C^0(\Omega);\ \int_\Omega \big|u(x)\big|\, dx < \infty \right\},$$

wobei wir wie üblich abkürzend dx statt $d\mathcal{L}^d(x)$ geschrieben haben. Dann ist zwar $\mathscr{L}^1(\Omega)$ ein linearer Raum und $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf diesem Raum, aber $\big(\mathscr{L}^1(\Omega), \|\cdot\|_1\big)$ ist nicht vollständig.

Zur Begründung betrachten wir das folgende Beispiel:
Sei $\Omega := B_1(0)$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Für $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolge (u_n), welche gegeben wird durch

$$u_n(x) := \frac{x_1}{\frac{1}{n} + |x|}.$$

Jedes u_n ist offenbar stetig in Ω mit $|u_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in \Omega$. Ferner strebt (u_n) punktweise auf Ω gegen die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$u(x) := \begin{cases} \frac{x_1}{|x|} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz gilt daher

$$\int_\Omega \big|u_n(x) - u(x)\big|\, dx = \|u_n - u\|_1 \xrightarrow{n} 0. \tag{2}$$

Daraus folgt, dass (u_n) eine Cauchy–Folge in $C^0(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ ist (warum?), die aber nicht konvergiert.
Denn angenommen, es existiert ein $w \in C^0(\Omega)$ mit $\|u_n - w\|_1 \xrightarrow{n} 0$. Wegen (2) würde dann aber

$$\int_\Omega \big|u(x) - w(x)\big|\, dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w = u \quad \mathcal{L}^d\text{–f. ü. auf } \Omega$$

folgen, was wegen der Stetigkeit von w in Ω und wegen $u \in C^0(\Omega \setminus \{0\})$ zu dem Widerspruch $w = u$ in $\Omega \setminus \{0\}$ führt. (Das hieße, dass w eine stetige Fortsetzung von u auf ganz Ω ist. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} u(x)$ existiert jedoch nicht.)

Unsere Beobachtungen führen also zu dem Schluß, dass *schwache* Normen (d. h. solche, die durch Integrale definiert werden) mit *klassischen* Funktionenräumen (wie z. B. C^0) nicht verträglich sind.
Das liegt daran, dass der Wert eines Integrals unverändert bleibt, wenn man aus dem Integrationsbereich eine Nullmenge herausschneidet. Mit anderen Worten: F. ü. identische Funktionen haben die gleiche Integral–Norm.
Gerade die *Variationsrechnung* zwingt aber dazu, mit integralen Normen zu arbeiten. Wir kehren daher zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zurück und erweitern den Begriff der μ–messbaren Funktion in der Art, dass das Problem ii) der Indefinitheit von $\|\cdot\|_1$ nicht mehr auftritt. Die naheliegende Idee um dies zu erreichen ist, die f. ü. identischen Funktionen zu einer Einheit zusammenzufassen, also Äquivalenzklassen solcher Funktionen zu bilden:
Sei (X, μ) ein Maßraum und für eine μ–messbare Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ sei

$$[u] := \big\{w : X \to \overline{\mathbb{R}};\ u \sim w\big\}$$

die Äquivalenzklasse von u bzgl. der Relation

$$u \sim w \quad :\Longleftrightarrow \quad u = w \quad \mu\text{–f. ü. auf } X.$$

Es gilt:

*i) u ist μ–*integrierbar*, d. h. es ist $\int_X |u(x)|\,d\mu(x) < \infty$, falls jedes $w \in [u]$ μ–*integrierbar *ist. In diesem Fall ist offenbar*

$$\int_X |u(x)|\,d\mu(x) = \int_X |w(x)|\,d\mu(x) \quad \textit{für alle} \quad w \in [u].$$

ii) $[0] = \{w : X \to \overline{\mathbb{R}};\ w = 0\ \mu\text{–f. ü. auf } X\}$.

iii) Sind u, $w : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ–messbar und μ–f. ü. endlich (d. h. μ–f ü. reell) auf X, so machen $[u + w]$ und $[cu]$ $(c \in \mathbb{R})$ Sinn.

Definition 1.2 (Fast überall definierte Funktion)**.**
Eine μ–f.ü. (eindeutig) definierte Funktion von $X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist die Äquivalenzklasse $[u]$ einer μ–messbaren und μ–f. ü. endlichen Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Als Beispiel betrachte man die Äquivalenzklasse der Funktion $u(x) = \frac{x}{|x|}$: für jeden Vertreter kann in $x = 0$ ein beliebiger Wert vorgegeben werden.

Wir vergessen also die Äquivalenzklasse $[u]$ und reden von einer μ–f. ü. eindeutig definierten Funktion u (später werden wir auch wieder nur von einer Funktion reden, wohlwissend, dass es sich dabei um eine Äquivalenzklasse von Funktionen handelt). Diese kann natürlich nicht mehr punktweise ausgewertet werden; es gibt lediglich ein eindeutig bestimmtes Integral (sofern dieses existiert). Eine punktweise Auswertung ist demnach nur nach Wahl eines Vertreters bzw. Repräsentanten für $[u]$ möglich.

Bemerkung 1.3.

i) Eine μ–f. ü. definierte Funktion $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist p. d. $\leq, =, \geq 0$, falls entsprechendes für jeden Vertreter der zugeh. Äquivalenzklasse $[u]$ zutrifft. Beispielsweise bedeutet $[\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}] = 0$, dass jede mit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ $\mathcal{L}^1$–f. ü. auf $\mathbb{R}$ übereinstimmende Funktion $\mathcal{L}^1$–f. ü. identisch der Nullfunktion ist.

*ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine $\mathcal{L}^d$–messbare Funktion. Dann gibt es in $[u]$ höchstens einen stetigen Vertreter (vgl. A. 2.**??**). Allgemein braucht eine solche Funktion also nicht einmal stetig zu sein.*
Gibt es für die fast überall eindeutig definierte Funktion u genau einen stetigen Vertreter (bzw. genau einen Vertreter der Klasse C^k mit einem $k \in [1, \infty]$), so nennt man u selbst wieder stetig (bzw. von der Klasse C^k) und schreibt wie üblich wieder $u \in C^0(\Omega)$ (bzw. $u \in C^k(\Omega)$). (Man beachte, dass diese Sprechweise nur dann Sinn macht, wenn es nur genau einen solchen Vertreter gibt!)

Definition 1.4 (Lebesgue–Raum)**.** *Sei (X, μ) ein Maßraum und sei $1 \leq p < \infty$. Dann heißt der durch*

$$L^p(X; \mu) := \{u : X \to \overline{\mathbb{R}};\ u\ \mu\text{–f. ü. definiert mit } \|u\|_p < \infty\}$$

mit

$$\|u\|_p := \|u\|_{p;X} := \left(\int_X |u(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty]$$

erklärte normierte Raum $\left(L^p(X; \mu), \|\cdot\|_p\right)$ der Lebesgue–Raum der auf X bzgl. dem Maßμ p–summierbaren Funktionen.

Bemerkung 1.5.

i) *Sei $\mathbb{N}$ versehen mit dem Zählmaß$\mu_\#$. Dann sind die bzgl. $\mu_\#$ messbaren Funktionen Folgen $u := (u_n) \subset \mathbb{R}$, und es gibt nur eine $\mu_\#$–Nullmenge, nämlich die leere Menge. Man erhält hier*

$$\int_{\mathbb{N}} u(x)\, d\mu_\#(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

und schreibt auch ℓ^p statt $L^p(\mathbb{N};\mu_\#)$. Dann ist

$$u \in \ell^p \quad \Longleftrightarrow \quad \|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \big|u_n(x)\big|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

ist. Der Raum ℓ^p heißt der Raum der p–summierbaren Folgen. Insbesondere ist ℓ^1 genau der Raum der absolut konvergenten Zahlenreihen.

ii) *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ schreiben wir üblicherweise $L^p(\Omega)$ statt $L^p(\Omega;\mathcal{L}^d)$. Weiter unten werden wir auch L^p–Räume $L^p(\Omega)^D = L^p(\Omega,\mathbb{R}^D)$ für Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^D$ ($D \in \mathbb{N}$ mit $D \geq 2$) erklären.*

Satz 1.6 (Vollständigkeit der Lebesgue–Räume)**.**
Sei (X,μ) ein Maßraum und sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(X;\mu)$ ein linearer Raum, welcher vermöge $\|\cdot\|_p$ zu einem Banach–Raum wird.
Insbesondere sind also $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$ und $\big(\ell^p, \|\cdot\|_p\big)$ Banach–Räume.

Zum Beweis dieser Aussage benötigt man das folgende.[2]

Lemma 1.7.

i) **(Hölder–Ungleichung)**
Seien $1 < p,q < \infty$ konjugierte Exponenten, d. h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (also $q = \frac{p}{p-1}$), und seien $u \in L^p(X;\mu)$ sowie $w \in L^q(X;\mu)$. Dann ist $uw \in L^1(X;\mu)$ und es gilt

$$\int_X |uw|\, d\mu(x) \leq \|u\|_p \, \|w\|_q.$$

ii) **(Minkowski–Ungleichung)**
Sei $1 \leq p < \infty$ und seien $u,w \in L^p(X;\mu)$. Dann ist auch $u+w \in L^p(X;\mu)$ und es gilt

$$\|u+w\|_p \leq \|u\|_p + \|w\|_p.$$

In der Hölder–Ungleichung gilt Gleichheit, falls $u = cw$ (f. ü.) mit einem $c \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis:

i) Seien $s,t,\alpha,\beta > 0$ mit $\alpha + \beta = 1$. Wegen der Konkavität des Logarithmus ist dann (vgl. Fig. 2)

$$\log(\alpha s + \beta t) \geq \alpha \log s + \beta \log t,$$

[2] Die Hölder–Ungleichung gilt auch mit den Wahlen $p = \infty$ und $q = 1$ (mit der Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$). Dies wird später klar, wenn wir den Raum $L^\infty(X;\mu)$ erklärt haben. Entsprechendes gilt für die Minkowski–Ungleichung.

also $\alpha s + \beta t \geq s^\alpha t^\beta$. Sind nun die konjugierten Exponenten $\alpha := \frac{1}{p}$ und $\beta := \frac{1}{q}$ und wählen wir $s := x^{1/\alpha}$, $t := y^{1/\beta}$ mit $x, y > 0$, so erhalten wir die Ungleichung:

$$xy \leq \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q. \tag{3}$$

Natürlich gilt (3) trivialerweise, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist. Seien nun $\|u\|_p$, $\|w\|_q > 0$ (sonst ist die Behauptung trivial). Wir setzen nun $x := \frac{|u|}{\|u\|_p}$ und $y := \frac{|w|}{\|w\|_q}$ und gelangen mit (3) zu

$$\frac{|u|}{\|u\|_p}\,\frac{|w|}{\|w\|_q} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|w|^q}{\|w\|_q^q} \quad \mu\text{–f. ü. auf } X,$$

und Integration über X liefert

$$\frac{1}{\|u\|_p}\,\frac{1}{\|w\|_q}\int_X |uw|\,d\mu \leq \frac{1}{p}\,\frac{1}{\|u\|_p^p}\int_X |u|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\,\frac{1}{\|w\|_q^q}\int\limits_X |w|^q\,d\mu = 1,$$

und damit die Behauptung.

ii) Der Fall $p = 1$ ist offensichtlich. Sei also $p > 1$ und $q := \frac{p}{p-1}$ (d. h. p und q sind konjugierte Exponenten). Wir zeigen zunächst, dass $|u + w|^p$ integrierbar, also $u + w \in L^p(X;\mu)$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} |u + w|^p &\leq \big(|u| + |w|\big)^p \leq \big(2\max\big\{|u|, |w|\big\}\big)^p \\ &= 2^p \max\big\{|u|^p, |w|^p\big\} \leq 2^p\big(|u|^p + |w|^p\big), \end{aligned}$$

wobei Repräsentanten für u und w gewählt, und das Maximum punktweise gebildet wurde, d. h. die Ungleichungen gelten μ–f. ü. auf X. Damit ist

$$\int_X |u + w|^p\,d\mu \leq 2^p\left(\int_X |u|^p\,d\mu + \int_X |w|^p\,d\mu\right),$$

also $u + w \in L^p(X;\mu)$ gezeigt. Nun wird mit i)

$$\begin{aligned} \|u + w\|_p^p &= \int_X |u + w|^p\,d\mu = \int_X |u + w|^{p-1}|u + w|\,d\mu \\ &\leq \int_X |u||u + w|^{p-1}\,d\mu + \int_X |w||u + w|^{p-1}\,d\mu \\ &\leq \|u\|_p\left(\int_X |u + w|^{q(p-1)}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|w\|_p\left(\int_X |u + w|^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \big(\|u\|_p + \|w\|_p\big)\|u + w\|_p^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $\|u + w\|_p > 0$ unmittelbar folgt (sonst gilt das Behauptete trivialerweise). □

Beweis von Satz 1.6.
Sei $u \in L^p(X;\mu)$. Ist $\|u\|_p = 0$, so ist $u \equiv 0$ (genauer: $[u] = 0$). Ferner ist $\|cu\|_p = |c|\|u\|_p$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und wegen Lemma 1.7 ii) gilt die Dreiecksungleichung, d. h. $L^p(X;\mu)$ wird vermöge $\|\cdot\|_p$ zu einem normierten Raum.
Sei dazu $(u_n) \subset L^p(X;\mu)$ eine Cauchy–Folge bzgl. $\|\cdot\|_p$. Dann genügt es zu zeigen, dass eine Teilfolge $\big(u_{n_k}\big)_k$ von (u_n) gegen eine Funktion $u \in L^p(X;\mu)$ konvergiert. Denn eine Cauchy–Folge mit konvergenter Teilfolge ist bereits selbst konvergent:

$$\|u_n - u\|_p \le \|u_{n_k} - u\|_p + \|u_{n_k} - u_n\|_p \xrightarrow{k} 0.$$

Wegen der Cauchy–Bedingung für (u_n) gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}, N_k \ge k$ derart, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|u_{N_{k+1}} - u_{N_k}\right\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1. \tag{4}$$

Setzen wir $\widetilde{u}_k := u_{N_k}$ und $\omega_\nu := \sum_{k=1}^{\nu} |\widetilde{u}_{k+1} - \widetilde{u}_k|$ für $\nu \in \mathbb{N}$, so ist wegen (4) $\|\omega_\nu\|_p \le 1$. Nach dem Lemma von Fatou ist dann

$$\int_X |\lim_\nu \omega_\nu|^p \, d\mu \le \liminf_\nu \int_X |\omega_\nu|^p \, d\mu = \liminf_\nu \|\omega_\nu\|_p^p \le 1,$$

d. h. $\lim_\nu \omega_\nu$ existiert für μ–f. a. $x \in X$. Damit haben wir

$$\left|\widetilde{u}_k(x) - \widetilde{u}_l(x)\right| \le \sum_{\nu=l}^{k} \left|\widetilde{u}_{\nu+1}(x) - \widetilde{u}_\nu(x)\right| \xrightarrow{k,l} 0 \quad \text{für } \mu\text{–f. a. } x \in X,$$

weshalb also $(\widetilde{u}_k)$ für μ–f. a. $x \in X$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ ist. Die punktweise Grenzfunktion $u(x) := \lim_k \widetilde{u}_k(x)$ existiert für μ–f. a. $x \in X$ ($[u]$ ist dadurch wohldefiniert). Bleibt zu zeigen, dass $u \in L^p(X;\mu)$ ist. Wieder unter Verwendung des Lemmas von Fatou erhalten wir aus der punktweisen Konvergenz von (w_k):

$$\begin{aligned}
\int_X |u - \widetilde{u}_\nu|^p \, d\mu &= \int_X \lim_k |\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu|^p \, d\mu \le \liminf_k \int_X |\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu|^p \, d\mu \\
&= \liminf_k \|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu\|_p^p = \left(\liminf_k \|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}_\nu\|_p\right)^p \\
&\le \left(\liminf_k \sum_{j=\nu}^{k-1} \|\widetilde{u}_{j+1} - \widetilde{u}_j\|_p\right)^p \overset{(4)}{\le} \left(\sum_{j=\nu}^{\infty} 2^{-j}\right)^p \xrightarrow{\nu} 0,
\end{aligned}$$

ergo $u - \widetilde{u}_\nu \in L^p(X;\mu)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$, und damit auch $u \in L^p(X;\mu)$. $\square$

Unmittelbar aus der soeben durchgeführten Konstruktion ergibt sich:

Korollar 1.8 (Punktweise Konvergenz fast überall).
Seien $1 \le p < \infty$ und $(u_n) \subset L^p(X;\mu)$ eine Folge mit $u_n \xrightarrow{n}: u$ in $L^p(X;\mu)$. Dann gibt es eine Teilfolge von (u_n) (o. E. (u_n) selbst) derart, dass (nach Wahl eines Vertreters) gilt: $u_n(x) \xrightarrow{n} u(x)$ für μ–f. a. $x \in X$.

L^p–Konvergenz impliziert also punktweise Konvergenz fast überall (wenigstens) für eine Teilfolge für „geeignete“ Vetreter. Dabei bedeutet „geeignet“, dass man für jedes Folgenglied und auch für die Grenzfunktion einen beliebigen Repräsentanten zu wählen hat. Es ist demnach allgemein falsch, dass die Folge selbst punktweise f. ü. konvergiert.

Beispiele.

i) ℓ^p *ist ein Banach–Raum.*

ii) $L^p(\Omega)$ *ist ein Banach–Raum für* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

iii) $L^p(\omega; \mathcal{H}^s)$ *für eine* s*–dimensionale (genügend glatte) Untermannigfaltigkeit* $\omega \subset \mathbb{R}^d$. *Dabei bezeichnet* $\mathcal{H}^s$ *das* s*–dimensionale Hausdorff–Maü.*

In unserer Skala fehlt noch der Raum $L^\infty(X;\mu)$, dessen Definition durch die üquivalenzklassenbildung etwas erschwert wird.

Definition 1.9 (Essentielles Supremum/Infimum).
Sei (X,μ) *ein Maßraum und sei* u *eine* μ*–f. ü. eindeutig definierte Funktion. Dann heiüt die Größe*

$$\begin{aligned}\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} u(x) &:= \inf\big\{c \in \mathbb{R};\ w \le c\ \mu\text{–f.ü. auf } X \text{ für jedes } w \in [u]\big\}\\ &= \inf_{\mu(N)=0} \left\{ \sup_{x \in X\setminus N} u(x) \right\} \in (-\infty, \infty]\end{aligned}$$

das essentielle (oder wesentliche) Supremum von u *auf* X. *Entsprechend ist das essentielle (oder wesentliche) Infimum* $\operatorname{ess\,inf}_{x\in X} u(x)$ *von* u *auf* X *erklärt.*

Mit dem essentiellen Supremum lässt sich nun eine Norm erklären:

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{\infty;\,X} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} \big|u(x)\big|,$$

Tatsächlich ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm, welche den Raum $L^\infty(X;\mu)$ der μ–f. ü. auf X eindeutig definierten, beschränkten Funktionen, den wir gleich definieren, zu einem Banach–Raum macht. Wir nennen die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auch wieder Supremum–Norm.

Bemerkung 1.10.

i) Es ist $\|u\|_\infty < \infty$, *falls es einen Vertreter* w *von* u *gibt, der außerhalb einer* μ*–Nullmenge beschränkt ist. In diesem Fall ist* $\|u\|_\infty$ *die kleinste dabei vorkommende Schranke.*

ii) Seien $X := \mathbb{R}$ *und* $\mu := \mathcal{L}^1$. *Dann ist* $\sup_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 1$, *aber* $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$. *Bei der Berechnung des „gewöhnlichen Supremums“ spielt jeder Funktionswert eine Rolle, beim essentiellen Supremum werden dagegen Werte auf Nullmengen ignoriert.*

Satz 1.11 (Vollständigkeit von L^∞).
Sei (X,μ) *ein Maßraum. Dann ist der Raum*

$$L^\infty(X;\mu) := \big\{u : X \to \overline{\mathbb{R}};\ u\ \mu\text{–f. ü. definiert mit } \|u\|_\infty < \infty\big\}$$

der μ*–f. ü. eindeutig definierten, beschränkten Funktionen vollständig bzgl. der Supremum–Norm* $\|\cdot\|_\infty$.

Beispiele.

i) ℓ^∞ *ist ein Banach–Raum, der Raum der beschränkten Folgen in* $\mathbb{R}$ *(vgl. Bsp. 1.5).*

ii) $L^\infty(\Omega)$ *ist ein Banach–Raum für* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

iii) $L^\infty(\omega; \mathcal{H}^k)$ *für eine* k*–dimensionale Untermannigfaltigkeit* $\omega \subset \mathbb{R}^d$.

Beweis von Satz 1.11.
Zunächst überlegt man sich leicht, dass durch $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm auf $L^\infty(X;\mu)$ erklärt wird. Dies sei dem Leser als Übung überlassen.
Wir zeigen die Vollständigkeit: Sei dazu (u_n) eine Cauchy–Folge in $L^\infty(X;\mu)$. Wir wählen Vertreter für u_n (wieder mit u_n bezeichnet), und wissen, dass

$$\big|u_n(x) - u_m(x)\big| \le \|u_n - u_m\|_\infty \xrightarrow{n,m} 0 \quad \text{für } \mu\text{–f. a. } x \in X,$$

d. h. für alle $x \in X$ außerhalb einer μ–Nullmenge N.[3] Ferner existiert eine positive Konstante c mit $\big|u_n(x)\big| \le \|u\|_\infty \le c$ für μ–f. a. $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$u(x) := \begin{cases} \lim\limits_n u_n(x) & ; \quad x \in X \setminus N \\ 0 & ; \quad x \in N \end{cases}$$

für alle $x \in X$ wohldefiniert und μ–messbar (als punktweise Grenzfunktion μ–messbarer Funktionen).[4] Für $x \notin N$ ist

$$\big|u(x) - u_m(x)\big| = \lim_n \big|u_n(x) - u_m(x)\big| \le \liminf_n \|u_n - u_m\|_\infty,$$

also $\|u - u_m\|_\infty \le \liminf_n \|u_n - u_m\|_\infty \xrightarrow{m} 0$. Daher ist $u - u_m \in L^\infty(X;\mu)$ und die Behauptung folgt. □

Beobachtungen.

i) Sind $u_n, u \in L^\infty(X;\mu)$ *mit* $u_n \xrightarrow{n} u$ *in* $L^\infty(X;\mu)$*, so strebt für alle Vertreter* $u_n \xrightarrow{n} u$ *gleichmäßig außerhalb einer* μ*–Nullmenge. Mit anderen Worten ist* $\|\cdot\|_\infty$ *die Norm der* μ*–f. ü. gleichmäßigen Konvergenz.*

ii) Ist $\mu(X) < \infty$*, so ist* $L^p(X;\mu) \supset L^q(X;\mu)$ *für alle* $1 \le p \le q \le \infty$ *und es gilt in diesem Fall*

$$\|u\|_p \le \|u\|_q \, \mu(X)^{1/p - 1/q}.$$

Man überlege sich etwa für $X = \mathbb{R}$ *und* $\mu = \mathcal{L}^1$ *Beispiele die zeigen, dass* $\mu(X) < \infty$ *keine unnötige Voraussetzung ist.*

Unser nächstes Ziel ist die Charakterisierung der zu den Räumen L^p gehörigen dualen Räume linearer, stetiger Abbildungen von $L^p \to \mathbb{R}$. Dazu beschäftigen wir uns vorweg etwas allgemeiner mit linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen.
Ist $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Raum, so bezeichnen wir mit $\mathbb{B}$ die offene Einheitskugel in X, also

$$\mathbb{B} := \big\{x \in X;\ \|x\| < 1\big\}.$$

[3] Hier geht ein, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.
[4] Statt u auf N identisch 0 zu setzen, hätte man natürlich auch jeden anderen Wert nehmen können.

Definition 1.12 (Stetige lineare Abbildung).
Seien X, Y normierte $\mathbb{R}$–Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt stetig (oder auch beschränkt), falls die Größe

$$\|T\|_\infty := \|T\|_{\infty;\,X,Y} = \sup_{x\in\overline{\mathbb{B}}} \|Tx\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

endlich ist.

Vorsicht! Der Terminus „beschränkt“ bedeutet hier nicht $\|Tx\| \le const$ für alle $x \in X$, sondern $\|Tx\| \le \|T\|_\infty \|x\|$ für alle $x \in X$. Um solche Verwechslungen auszuschließen, sprechen wir im Folgenden stets von einer „stetigen“, linearen Abbildung. Das folgende Lemma rechtfertigt diese Nomenklatur.

Vorweg erinnern wir an den Begriff der Lipschitz–Stetigkeit. Sind X und Y normierte $\mathbb{R}$–Vektorräume, so heißt eine Abbildung $T : X \to Y$ *Lipschitz–stetig* (oder *dehnungsbeschränkt*) mit Lipschitz–Konstante $L \in [0, \infty)$, falls

$$\|Tx - Ty\| \le L\|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

gilt, wobei L die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Genauer ist:

$$L := \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} = \|T\|_\infty$$

(sofern dieses Supremum existiert).

Lemma 1.13.
Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

i) $\|T\|_\infty < \infty$.

ii) T ist stetig in 0.

iii) T ist überall in X stetig.

iv) T ist Lipschitz–stetig.

Sei $L := \|T\|_\infty < \infty$. Per Definition ist $\|Tx\| \le L$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| \le 1$. Für beliebiges $z \neq 0$ sei $x := \frac{z}{\|z\|}$. Dann ist $\|Tz\| \le L\|z\|$, und mit $z := x - y$ folgt

$$\|Tx - Ty\| \le L\|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in X,$$

also T Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante L. Insbesondere ist T überall stetig, also auch im Ursprung.
Sei nun umgekehrt T Lipschitz–stetig. Für $y = 0$ wird dann $\|Tx\| \le L\|x\|$, also $\|Tx\| \le L$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| \le 1$.
Sei T stetig in 0, dann ist $\|Tx\| \le 1$ falls $\|x\| \le \epsilon$ ist für ein $\varepsilon > 0$. Für $x \in \mathbb{B}$ ist $\|\epsilon x\| \le \varepsilon$ und daher

$$\|T(x\varepsilon)\| \le 1 \Leftrightarrow \|Tx\| \le \frac{1}{\varepsilon}$$

und es folgt $\|T\| \le \frac{1}{\varepsilon}$, also (i). □

Bemerkung 1.14.

i) Die Größe $\|T\|_\infty$ *heißt (falls sie endlich ist) die Operator–Norm von* T. *Stetige, lineare Abbildungen* T *nennt man auch lineare Operatoren — daher der Name der Norm.*

ii) Die Menge der stetigen, linearen Abbildungen

$$\mathscr{L}(X,Y) := \big\{T : X \to Y \text{ linear; } \|T\|_\infty < \infty\big\}$$

ist ein linearer Raum. Wir schreiben $\mathscr{L}(X)$ *statt* $\mathscr{L}(X,X)$.

iii) Für $\dim X, \dim Y < \infty$ *sind alle linearen Abbildungen stetig, ganz unabhängig davon, welche Normen* X *und* Y *tragen. Dies ist i. a. falsch für unendlich–dimensionales* X *(vgl. übung).*

iv) Sei (X,μ) *ein Maßraum, wobei* $\mu(X) < \infty$ *sei. Wir setzen*

$$T : L^\infty(X;\mu) \to L^1(X;\mu),\ Tu := u$$

(T *ist der sog. Einbettungsoperator). Dann ist*

$$\|Tu\|_1 = \int_X |u|\, d\mu \le \mu(X)\, \|u\|_\infty,$$

so dass $\|T\|_\infty = \mu(X)$ *ist.*

v) Man nennt $X^* := \mathscr{L}(X,\mathbb{R})$ *den zu* X *gehörigen* Dualraum, *bestehend aus den stetigen linearen Funktionalen von* $X \to \mathbb{R}$.[5]

Satz 1.15 (Vollständigkeit des Raums der stetigen linearen Abbildungen)**.**
Ist Y *ein Banach–Raum, so ist* $\mathscr{L}(X,Y)$ *vollständig bzgl. der Operator–Norm. Insbesondere ist* X^* *ein Banach–Raum (*X *selbst muss aber kein Banach–Raum sein).*

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns wieder den Lebesgue-Räumen zu, deren Dualräume $L^p(X;\mu)^* = \mathscr{L}\big(L^p(X;\mu),\mathbb{R}\big)$ wir näher studieren wollen. Wir betrachten vorweg ein Beispiel.

Beispiel.
Sei (X,μ) ein Maßraum. Dann wird durch $T : L^1(X;\mu) \to \mathbb{R}$,

$$Tu := \int_X u\, d\mu$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $L^1(X;\mu)$ definiert. Mit anderen Worten ist $T \in L^1(X;\mu)^*$. Denn für jede Funktion $u \in L^1(X;\mu)$ ist

$$|Tu| = \left|\int_X u\, d\mu\right| \le \int_X |u|\, d\mu = \|u\|_1.$$

Für $\mu(X) < \infty$ liegt T sogar in allen Dualräumen $L^p(X;\mu)^*$ mit $1 \le p \le \infty$ (warum?).

[5] Auf unendlich–dimensionalen Räumen X sind die linearen Abbildungen $X \to \mathbb{R}$ nicht automatisch stetig, wie dies für endlich–dimensionale X der Fall ist. Daher spricht man hier auch vom *stetigen* oder *topologischen* Dualraum X^*, welcher in diesem Fall ein echter Teilraum des *algebraischen* Dualraums *aller* linearen Abbildungen $X \to \mathbb{R}$ ist. In der Literatur findet man auch die Bezeichnung X' für den stetigen Dualraum.

Bemerkung 1.16.
Seien (X,μ) *ein Maßraum,* $1 \le p \le \infty$ *und*

$$q := p' := \begin{cases} \infty & ; \quad p = 1 \\ \frac{p}{p-1} & ; \quad 1 < p < \infty \\ 1 & ; \quad p = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Dann ist für jedes fixierte $w \in L^q(X;\mu)$ *das Funktional* $T_w : L^p(X;\mu) \to \mathbb{R}$,

$$T_w u := \int_X uw \, d\mu \tag{6}$$

wohldefiniert. Nach der Hölder–Ungleichung (Lemma 1.7 i)) ist

$$|T_w u| \le \|u\|_p \|w\|_q,$$

oder also $\|T_w\|_\infty \le \|w\|_q$*, d. h. es ist* $T_w \in L^p(X;\mu)^*$*. Es gilt sogar*

$$\|T_w\|_\infty = \|w\|_q \quad \text{für alle} \quad w \in L^q(X;\mu). \tag{7}$$

Letzteres sieht man wie folgt: Für $1 \le q < \infty$ *und ein* $w \in L^q(X;\mu)$ *sei* $u := |w|^{q-1} \operatorname{sgn}(w)$*, wobei*

$$\operatorname{sgn}(w) := \begin{cases} \frac{w}{|w|} & ; \quad [w \neq 0] \\ 0 & ; \quad [w = 0] \end{cases}.^6$$

Im Fall $q = 1$ *ist dann* $u = \operatorname{sgn}(w)$ *und*

$$T_w u = \int_X |w| \, d\mu = \|w\|_1 \in L^\infty(X;\mu).$$

Im Fall $1 < q < \infty$ *ist*

$$\int_X |u|^p \, d\mu = \int_X |w|^q \, d\mu = \int_X uw \, d\mu = T_w u,$$

und wegen $\|u\|_p = \|w\|_q^{q/p}$ *ist (o. E. sei* $\|u\|_p \neq 0$*, sonst ist* $w = 0$*)*

$$T_w\left(\frac{u}{\|u\|_p}\right) = \|w\|_q.$$

Der Fall $q = \infty$ *ist etwas aufwendiger.*

Halten wir also fest: Die Abbildung $\mathfrak{J} : L^q(X;\mu) \to L^p(X;\mu)^*$, gegeben durch

$$\mathfrak{J} w := T_w$$

ist eine lineare Isometrie, d. h. $\mathfrak{J}$ ist linear und längentreu,

$$\|T_w\|_\infty = \|w\|_q \quad \text{für alle} \quad w \in L^q(X;\mu),$$

wobei die letzte Identitüt nach (7) gilt. Insbesondere ist $\mathfrak{J}$ injektiv, denn $\mathfrak{J}(w) = 0$ heißt $T_w = 0$, was nach (7) $w = 0$ ergibt. Schwieriger ist der Beweis der Surjektivität (vgl. [Al] Satz 4.12, S. 159), der jedoch nur für $p < \infty$ (und $q > 1$) gelingt. Insgesamt folgt:

[6] $[w \neq 0]$ steht für die Teilmenge des Definitionsbereichs (hier X) der Funktion w, wo $w \neq 0$ ist.

Satz 1.17 (Riesz).
Sei $1 \le p < \infty$ und sei q wie in (5)*. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{J} : L^q(X;\mu) \to L^p(X;\mu)^*, \quad w \mapsto T_w,$$

mit T_w wie in (6)*, ein (isometrischer) Isomorphismus, d. h. es ist*

$$L^p(X;\mu)^* \cong L^q(X;\mu)^7.$$

Wir schreiben auch kürzer $(L^p)^* = L^q$. Man beachte, dass diese Aussage im Fall $p = \infty$ falsch ist, wie wir weiter unten noch sehen werden.

Bemerkung 1.18.

i) Für $p = 1$ ist $L^1(X;\mu)^* \cong L^\infty(X;\mu)$, d. h. ist $T : L^1(X;\mu) \to \mathbb{R}$ ein lineares und stetiges Funktional, so gibt es eine Funktion $w \in L^\infty(X;\mu)$, so dass $T = T_w$.

ii) Für $p = 2$ ist $L^2(X;\mu)^* \cong L^2(X;\mu)$, d. h. ist $T \in L^2(X;\mu)^*$, so gibt es eine Funktion $w \in L^2(X;\mu)$, so dass $T = T_w$. Die Isomorphie von L^2 und L^{2^*} lässt sich auch ganz ohne Maßtheorie beweisen, wie wir in § 4 feststellen werden.

iii) Speziell ist $(\ell^2)^* \cong \ell^2$ (vgl. Beispiel 1.5 i)), d. h. ist $T \in \big(\ell^2\big)^*$, so existiert eine Folge $w := (w_n) \in \ell^2$ mit $Tw_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n w_n = T_w u$ für alle $u := (u_n) \in \ell^2$.

Es gilt tatsächlich

Lemma 1.19. *Für einen Maßraum (X,μ) gilt im Allgemeinen*

$$L^1(X;\mu) \subsetneqq L^\infty(X;\mu)^*.$$

Eine Begründung liefert der folgende Satz von Hahn–Banach, den wir an dieser Stelle nicht beweisen wollen (vgl. [Al] Satz 4.14 und Satz 4.15).

Satz 1.20 (Hahn–Banach).
Seien $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Raum, $U \subset X$ ein Unterraum und $\tau \in U^*$. Dann gibt es eine Fortsetzung $T \in X^*$ von τ, d. h. $T|_U = \tau$ und $\|T\|_\infty = \|\tau\|_\infty$.

Beweis von Lemma 3.17: Sei nun $\tau : C^0_B(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\tau u := u(0)$. Dann ist τ offenbar linear und es ist $|\tau u| \le \|u\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^d} |u| < \infty$, da u stetig und beschränkt ist. Ferner ist $C^0_B(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Nach dem Satz von Hahn–Banach 1.20 gibt es eine Fortsetzung $T \in L^\infty(\mathbb{R}^d)^*$ von τ. Angenommen, es existiert eine Funktion $w \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$Tu = \int_{\mathbb{R}^d} uw\,dx = T_w u \quad \text{für alle} \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Dann ist

$$0 = u(0) = \tau u = Tu = T_w u \quad \text{für alle} \quad u \in C^0_B(\mathbb{R}^d) \text{ mit } u(0) = 0.$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $0 \notin \Omega$. Dann ist $\int_\Omega uw\,dx = 0$ für jede Funktion $u \in C^0_\circ(\Omega) \subset C^0_B(\Omega)$, und daher $w = 0$ μ–f. ü. auf Ω, also $w = 0$ μ–f. ü. auf $\mathbb{R}^d$. (Dabei haben wir das nachfolgende Fundamentallemma der Variationsrechnung (Lem. 1.25)

[7] Im Fall $p = 1$ ist zusätzlich zu fordern, dass X abzählbar μ–messbar ist, d. h. es gibt abzählbar viele μ–messbare Mengen $A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Falls $X = \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\mu = \mathcal{L}^d$ ist dies offenbar immer erfüllt

benutzt.) Damit ist $T \equiv 0$, also auch $\tau \equiv 0$; ein Widerspruch, da es Funktionen u gibt mit $\tau u \neq 0$. Dies zeigt, dass der Dualraum von L^∞ i. a. nicht mit dem Raum L^1 übereinstimmen kann. □

Wir stellen noch eine andere Version des Satzes von Hahn–Banach vor, die wir später benötigen werden:

Satz 1.21.
Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Raum. Dann gibt es zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ ein $T \in X^*$ mit $\|T\|_\infty = 1$ und $Tx = \|x\|$.

Wir betrachten zunächst die lineare Hülle $\langle x \rangle$ von x und definieren auf $U := \langle x \rangle$ für $y = \alpha x$ durch $\tau y = \alpha \|x\|$ ein stetig lineares Funktional mit $\|\tau\|_\infty = 1$ und $\tau x = \|x\|$. Mit Satz 1.20 folgt die Behauptung. □

In Ü 1 haben wir den Raum $C_\circ^\infty$ der Testfunktionen kennengelernt. Diese Funktionen spielen eine besondere Rolle, wie der folgende Satz zeigt

Satz 1.22 (Dichtheit von $C_\circ^\infty$ in L^p)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $1 \leq p < \infty$. Dann liegt der Raum $C_\circ^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, d. h. zu jeder Funktion $u \in L^p(\Omega)$ gibt es eine Folge $(\eta_n) \subset C_\circ^\infty(\Omega)$, so dass $\eta_n \overset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$ gilt.

Bemerkung.
Für $p = \infty$ ist die Aussage von Satz 1.22 falsch, denn sonst hätte jede Funktion aus $L^\infty(\Omega)$ einen stetigen Vertreter (gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen isnd stetig).

Zum Beweis benötigen wir folgende Hilfsausagen

Lemma 1.23. *a) Sei $u \in L^p(\Omega)$, $u \geq 0$ $\mathcal{L}^d$-f. ü. mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es eine Folge einfacher Funktionen (u_n) mit $u_n \leq u_{n+1}$ und $u_n \overset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$.*

b) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion, dann gibt es eine Folge $\eta_n \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\eta_n \overset{n}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

a) u ist einfache Funktion heißt u ist von der Form

$$u(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \quad \alpha_k \geq 0,$$

mit $\mathcal{L}^d$–fast disjunkten, $\mathcal{L}^d$–messbaren Mengen A_k mit

$$\mathcal{L}^d(A_k) < \infty \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{k=1}^{r} A_k.$$

Nach Definition des Maßintegrals existiert eine Folge einfacher Funktionen (u_n) mit $u_n \leq u$ $\mathcal{L}^d$-f.ü. und

$$\int_\Omega |u_n|^p \, dx \nearrow \int_\Omega |u|^p \, dx, \quad n \to \infty$$

wobei wir ohne Einschränkung $u_n \leq u_{n+1}$ annehmen können (dies entspricht der Untersumme). Es folgt wegen $|u_n|^p \leq |u|^p$ $\mathcal{L}^d$-f.ü.

$$\int_\Omega \big||u|^p - |u_n|^p\big| \, dx \overset{n}{\to} 0,$$

also $|u_n|^p \xrightarrow{n} |u|^p$ in $L^1(\Omega)$. Nach Teilfolgenwahl erhalten wir Konvergenz punktweise $\mathcal{L}^d$-f.ü. (vgl. Korollar 1.8) und daher $u_n \xrightarrow{n} u$ $\mathcal{L}^d$-f.ü. (wobei wir die Teilfolge wieder mit (u_n) bezeichnen). Nach dem Satz von Levi über monotone Konvergenz strebt dann bereits $u_n \xrightarrow{n} u$ in $L^p(\Omega)$.
b) Sei u einfach, d.h.

$$u(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x).$$

Wir wählen eine Folge $\eta_n^{A_k} \in C_0^\infty(A_k)$ mit

$$\eta_n^{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2/n \\ 0, & \text{wenn } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq 1/n \end{cases}$$

und $0 \leq \eta_n^{A_k} \leq 1$. Definieren wir $A_k^{2/n}$ als Menge der Punkte in A_k deren Abstand zum Rand von A_k kleiner oder gleich $2/n$ ist, folgt

$$\int_{A_k} |\mathbb{1}_{A_k} - \eta_n^{A_k}|^p \, dx = \int_{A_k^{2/n}} |\mathbb{1}_{A_k} - \eta_n^{A_k}|^p \, dx \leq \mathcal{L}^d(A_k^{2/n}) \xrightarrow{n} 0.$$

Nun definiert man $\eta_n \in C_0^\infty(\Omega)$ durch

$$\eta_n(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \eta_n^{A_k}(x).$$

Es folgt

$$\int_\Omega |\eta_n - u|^p \, dx = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p \int_\Omega |\mathbb{1}_{A_k} - \eta_n^{A_k}|^p \, dx \xrightarrow{n} 0,$$

also die gewünschte Konvergenz. □

Beweis von Satz 1.22.
Sei eine Funktion $u \in L^p(\Omega)$ vorgegeben. Wir schreiben $u = u^+ + u^-$, wobei $u^+ := \max(u, 0)$ und $u^- := \min(u, 0)$, und approximieren die Funktionen $u^\pm$ separat. (Man überlegt sich leicht, dass mit u auch die Funktionen $u^\pm$ zur Klasse $L^p(\Omega)$ gehören). Nach Lemma 3.8 a) existiert zu $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Funktion u_n mit

$$\|u_n - u\|_p \leq \frac{1}{2n}.$$

Zu u_n finden wir nach Lemma 3.8 b) eine Funktion $\eta_n \in C_0^\infty$ mit

$$\|\eta_n - u_n\|_p \leq \frac{1}{2n}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|\eta_n - u\|_p \leq \|\eta_n - u_n\|_p + \|\eta_n - u_n\|_p \leq \frac{1}{n},$$

d.h. $(\eta_n) \subset C_0^\infty$ leistet das Gewünschte. □

Zum Abschluss dieses § führen wir noch lokale sowie vektorielle Versionen der L^p–Räume ein, und beweisen das überaus wichtige Fundamentallemma der Variationsrechnung. Dieses wird uns in § 5 zu einem verallgemeinerten Ableitungsbegriff für L^p–Funktionen führen.

Definition 1.24. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, und $1 \leq p \leq \infty$. Wir definieren $L^p_{loc}(\Omega)$ als Menge der $\mathcal{L}^d$–f. ü. auf Ω eindeutig definierten Funktionen $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit*

$$u \in L^p(\omega) \quad \textit{für alle} \quad \omega \Subset \Omega.$$

Zur Erinnerung: $\omega \Subset \Omega$ bedeutet, dass $\overline{\omega}$ kompakte Teilmenge von Ω ist. Als Beispiel betrachte man die Funktion $u(x) = 1/x$ mit $\Omega = (0,1)$. Dann gehört u zur Klasse $L^1_{loc}(\Omega)$ aber nicht zu $L^1(\Omega)$.
(Natürlich lassen sich analog auch lokale Versionen von $L^p(X;\mu)$ definieren, wenn (X,μ) ein Maßraum mit einem normierten (oder auch nur topologischen) Raum X ist.)
Für vektorwertige Funktionen $u := (u^1, \ldots, u^D) : \Omega \to \mathbb{R}^D$ $(D \in \mathbb{N})$ definieren wir:

$$L^p(\Omega)^D := L^p(\Omega, \mathbb{R}^D) := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^D;\ u^\nu \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \nu = 1, \ldots, D \Big\}$$

und versehen diesen Raum mit der Norm:

$$\|u\|_p := \|u\|_{\Omega;p} := \begin{cases} \left(\sum_{\nu=1}^D \|u^\nu\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad p < \infty \\ \max_{\nu=1}^D \|u^\nu\|_\infty & ; \quad p = \infty. \end{cases}$$

Selbstredend übertragen sich alle Eigenschaften der Räume $L^p(\Omega)$ auf die vektoriellen Versionen (Vollständigkeit, Hölder–Ungleichung, ... Dualräume). Schließlich kann man auch hier noch lokale Versionen $L^p_{loc}(\Omega)^D = L^p_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^D)$ einführen.[8]

[8] In der Literatur finden sich auch die Bezeichnungen $L_p(\Omega)$, $L_p^{loc}(\Omega)$ sowie entsprechende Notationen für die vektoriellen Versionen.

Lemma 1.25 (Fundamentallemma der Variationsrechnung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ erfülle

$$\int_\Omega u(x)\eta(x)\,dx = 0 \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{8}$$

Dann ist $u \equiv 0$; genauer ist $u = 0$ f. ü. auf Ω. Ist dagegen

$$\int_\Omega u(x)\eta(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega), \eta \geq 0,$$

so ist $u \geq 0$ f. ü. auf Ω.

Wir zeigen nur den ersten Fall, den zweiten behandelt man analog. Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ eine Funktion, welche der Bedingung (8) genügt und $\omega \Subset \Omega$ beliebig. Dann gibt es nach Lemma 3.8 eine Folge $(\eta_n) \subset C_0^\infty(\omega)$ mit $0 \leq \eta_n \leq 1$ so dass

$$\eta_n \to \mathbb{1}_\omega \text{ in } L^p(\omega) \text{ bei } n \to \infty.$$

und nach Teilfolgenwahl (vgl. Korollar 1.8)

$$\eta_n \to \mathbb{1}_\omega \text{ punktweise bei } n \to \infty.$$

Mit dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz ($|u|$ ist die Majorante) und (8) ergibt sich

$$0 = \int_\Omega u(x)\eta_n(x)\,dx \xrightarrow{n} \int_\Omega u(x)\mathbb{1}_\omega(x)\,dx = \int_\omega u(x)\,dx. \tag{9}$$

Wir wühlen einen Vertreter für u (ebenfalls wieder mit u bezeichnet) und betrachten die $\mathcal{L}^d$–messbaren Mengen

$$\Omega^\pm := \big\{x \in \Omega;\ u^\pm(x) = u(x)\big\}.$$

Sei $\mathcal{L}^d(\Omega^+) > 0$. Wählen wir $\omega \Subset \Omega^+$ mit $\mathcal{L}^d(\omega) > 0$, so erhalten wir wegen (9) und $u > 0$ auf ω, dass $\mathcal{L}^d(\omega) = 0$ sein muss; Widerspruch. Es folgt, da $\mathcal{L}^d$ ein Radon-Maßist, [9]

Kapitel 2

Schwache Konvergenz

Ist X ein endlich–dimensionaler, normierter Raum, so besitzt jede beschränkte Folge in X eine in X konvergente Teilfolge. Diese Aussage ist als *Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß* bekannt; man sagt auch der Raum X sei *(folgen–) kompakt*[1]. Wie das nachfolgende (einfache) Beispiel zeigt, ist diese Aussage in unendlich–dimensionalen Räumen i. a. nicht mehr richtig.
Zur Motivation der Begriffsbildung „schwache Konvergenz“ betrachten wir eine abstrakte Variationsaufgabe: Sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Funktionenraum und sei $\emptyset \neq \mathscr{C} \subset X$ eine gegebene Teilmenge (in der konkreten Problemstellung wird diese Teilklasse durch Vorgabe von Randwerten oder durch andere Nebenbedingungen festgelegt). Wir betrachten ein *Funktional*[2] $T : X \to \mathbb{R}$, welches in der Klasse $\mathscr{C}$ minimiert werden soll. Gesucht ist also eine Funktion $u \in \mathscr{C}$ mit

$$T[u] = \inf_{w \in \mathscr{C}} T[w] =: \tau.$$

Dabei verlangt man, dass T *koerziv* ist, d. h. es ist

$$T[w] \geq \alpha\|w\| + \beta \quad \text{f ür alle} \quad w \in X \tag{1}$$

mit Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Wegen (1) ist $T[w] \geq \beta$ für alle $w \in \mathscr{C}$, also insbesondere $\tau \in \mathbb{R}$. Nach Definition des Infimums existiert daher eine *Minimalfolge* $(u_m) \subset \mathscr{C}$ für T, d. h es gilt:

$$\lim_m T[u_m] = \tau$$

und aus (1) folgt unmittelbar die *Normbeschränktheit* dieser Folge:

$$\sup_m \|u_m\| < \infty.$$

Existiert nun eine in X konvergente Teilfolge $\big(u_{m_k}\big)_k \subset (u_m)$ mit $u_{m_k} \xrightarrow{k}: u \in X$, so prüfe man, ob die Grenzfunktion u wieder zur Klasse $\mathscr{C}$ gehört und ob ferner

$$T[u] = \lim_k T[u_{m_k}] \tag{2}$$

[1] In metrischen (und damit auch in normierten) Räumen ist „folgenkompakt“ gleichbedeutend mit „überdeckungskompakt“. In allgemeinen topologischen Räumen ist dies i. a. falsch! Die Topologie des Raums muss dafür wenigstens eine *abzählbare Basis* besitzen. Dies ist insbesondere in sog. *separablen* Räumen der Fall (s. u.).

[2] Damit sei hier nicht ein lineares Funktional (linearer Operator) gemeint, sondern eben irgendeine „Funktion“, deren Argumente Funktionen aus X sind; allgemein hat ein Funktional Werte in $\overline{\mathbb{R}}$.

gilt. In diesem Fall ist dann offenbar u eine Lösung des Variationsproblems.
Das Problem besteht nun darin, dass in einem Funktionenraum (der unendlichdimensional ist) i. a. keine konvergente Teilfolge der Minimalfolge (u_m) existieren muss. Unsere Forderungen sind also offenbar zu stark. Daher benötigen wir eine Abschwächung des Konvergenzbegriffs: Wir werden noch sehen, dass in gewissen Räumen diese *schwache Konvergenz* unter gewissen Voraussetzungen die Auswahl einer konvergenten Teilfolge erlaubt. Hat man eine solche Teilfolge $\left(u_{m_k}\right)_k \subset (u_m)$ gefunden, deren (schwache) Grenzfunktion u zur Klasse $\mathscr{C}$ gehört, kann man aber in der obigen Situation nicht mehr erwarten, dass (2) gilt. Um zu erreichen, dass u tatsächlich eine (schwache) Lösung des Variationsproblems ist, genügt es aber, dass

$$T[u] \leq \liminf_k T[u_{m_k}] \tag{3}$$

ist. Letzere Eigenschaft nennt man *(schwache) Unterhalbstetigkeit* (s.[3]

Definition 2.1 (Schwache Konvergenz)**.**
Sei $\left(X, \|\cdot\|\right)$ ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt schwach konvergent gegen ein $x \in X$, falls gilt

$$\varphi(x_n) \xrightarrow{n} \varphi(x) \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in X^*.$$

In diesem Fall schreiben wir $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$.

Das *schwache* Analogon zur Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft in unendlich–dimensionalen normierten Räumen $\left(X, \|\cdot\|\right)$ lautet dann:

$$(x_n) \subset X,\ \sup_n \|x_n\| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_{n_k} \overset{k}{\rightharpoonup} : x \in X \\ \text{für eine Teilfolge } \left(x_{n_k}\right)_k. \end{cases} \tag{4}$$

Einen Raum X, in dem (4) gilt nennt man auch *schwach (folgen–) kompakt.*
Das *schwache Auswahlprinzip* (4) gilt jedoch keineswegs in jedem unendlich–dimensionalen, normierten Raum, wie wir weiter unten noch sehen werden. Die Räume, in denen dieses Prinzip Gültigkeit hat, sind genau die sog. *reflexiven* Räume, die wir gleich definieren werden. Da die schwache Konvergenz durch die Konvergenz stetiger linearer Operatoren in X^* (vgl. § 1) erklärt ist, schicken wir noch einige allgemeine Tatsachen über Folgen linearer, stetiger Operatoren vorweg. Der folgende Satz, der auf Banach und Steinhaus zurückgeht, liefert ein Prinzip für die gleichmäßige Beschränktheit von Folgen stetiger linearer Operatoren auf Banach–Räumen, welches besagt: *Aus der punktweisen Beschränktheit einer Folge stetiger linearer Operatoren, folgt bereits die gleichmäßige Beschränktheit dieser Folge.*

Satz 2.2 (Banach–Steinhaus)**.**
Seien X ein Banach–Raum, Y ein normierter Raum und $(T_n) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ eine Folge stetiger linearer Operatoren derart, zu jedem $x \in X$ eine positive Konstante $c = c(x)$ existiert mit $\sup_n \|T_n x\| \leq c$. Dann ist die Folge (T_n) beschränkt (bzgl. der Operator–Norm), d. h. es ist

$$\sup_n \|T_n\|_\infty = \sup_n \sup_{x \in \overline{\mathbb{B}}} \|T_n x\| < \infty.$$

[3] Natürlicher wäre es hier schwache Stetigkeit zu verlangen, jedoch sind bereits sehr einfache Funktionale nicht schwach stetig.

Beweis: Wir nehmen an, dass für jede offene Kugel $B \subset X$

$$\sup_n \sup_{x \in \partial B} \|T_n x\| = \sup_n \sup_{x \in \partial B} \|T_n x\| = \infty \tag{5}$$

ist. Demnach gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und ein $x_1 \in \mathbb{B}$ mit $\|T_{n_1} x_1\| > 1$. Da T_{n_1} stetig in x_1 ist, existiert eine Kugel $B_{r_1}(x_1) \Subset \mathbb{B}$ um x_1, so dass $\|T_{n_1} x\| \geq 1$ für alle $x \in \overline{B}_{r_1}(x_1)$ ist. Nach evtl. Vekleinern von $B_{r_1}(x_1)$ können wir ferner annehmen, dass

$$r_1 = \operatorname{diam} B_{r_1}(x_1) \leq \frac{1}{2} \operatorname{diam} \mathbb{B}$$

ist. Wieder mit (5) finden wir ein $n_2 > n_1$ und ein $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$ mit $\|T_{n_2} x_2\| > 2$, und da T_{n_2} stetig ist in x_2, gibt es eine Kugel $B_{r_2}(x_2) \Subset B_{r_1}(x_1)$ um x_2 mit

$$\begin{aligned} &\|T_{n_2} x\| \geq 2 \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{B}_{r_2}(x_2); \\ &r_2 \leq \frac{1}{2} \operatorname{diam} r_1 \leq \frac{1}{4} \operatorname{diam} \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Rekursiv so fortfahrend finden wir eine Folge (B_k) von Kugeln mit $B_{k+1} \Subset B_k \Subset \mathbb{B}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie eine Folge (n_k) von Indizes, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &\|T_{n_k} x\| \geq k \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{B}_k; \\ &\operatorname{diam} B_k \leq \frac{1}{2^k} \operatorname{diam} \mathbb{B}. \end{aligned}$$

Da X ein Banach–Raum ist, gibt es nach dem Durchschnittsatz von Cantor (Schachtelungsprinzip) genau ein $z \in X$ mit

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{B}_k = \{z\}.$$

Folglich ist $\|T_{n_k} z\| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Somit muss es eine Kugel um z geben, für die (5) nicht gilt. Daraus ergibt sich nun leicht die Behauptung. $\square$

Aus dem Satz von Banach–Steinhaus ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar, das die Sonderstellung stetiger linearer Operatoren zeigt: Die Stetigkeit bleibt bereits unter punktweiser Konvergenz erhalten.

Korollar 2.3 (Abgeschlossenheit von $\mathscr{L}(X,Y)$)**.**
Seien X ein Banach–Raum, Y ein normierter Raum und $(T_n) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ eine Folge mit $T_n(x) \xrightarrow{n} T(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist $T \in \mathscr{L}(X,Y)$.

Wir ziehen nun die für unsere Zwecke wichtigen Schlüsse, die schwache Konvergenz betreffend. Die Voraussetzung der folgenden Aussage ist insbesondere erfüllt, wenn die gegebene Folge $(x_n) \subset X$ schwach konvergent in X ist.

Korollar 2.4.
Seien X ein normierter Raum und $(x_n) \subset X$ eine Folge mit

$$\big|\varphi(x_n)\big| \leq c \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N},\ \varphi \in X^*$$

mit positiven Konstanten $c = c(\varphi)$. Dann ist $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

Beweis: Wir betrachten die *kanonische* Abbildung

$$\imath : X \to X^{**},\ x \mapsto \imath_x$$

in den *Bidualraum* $X^{**} := \big(X^*\big)^*$ von X, d. h. jedem $x \in X$ wird eine stetige lineare Abbildung $\imath_x : X^* \to \mathbb{R}$ zugeordnet, wobei $\imath_x\varphi := \varphi(x)$ für alle $\varphi \in X^*$ ist. Wegen $|\imath_x\varphi| \leq \|\varphi\|_\infty\|x\|$ ist

$$\|\imath_x\|_\infty = \sup_{\varphi \in X^*\setminus\{0\}} \frac{|\imath_x\varphi|}{\|\varphi\|_\infty} \leq \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in X,$$

weshalb $\imath$ eine *Einbettung* ist[4]. Man nennt $\imath$ die *kanonische Einbettung* von X in X^{**} und schreibt $X \hookrightarrow X^{**}$.
Nach dem Satz von Hahn–Banach 1.20 können wir zu jedem $x \neq 0$ ein $\varphi \in X^*$ so wählen, dass $\|\varphi\|_\infty = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$, also $\|\imath_x\varphi\| = \|x\|$ ist. Mithin ist $\imath$ eine lineare Isometrie . Sei nun $T_n := \imath_{x_n} : X^* \to \mathbb{R}$ für eine Folge $(x_n) \subset X$. Dann ist

$$|T_n\varphi| = \big|\varphi(x_n)\big| \leq c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},\ \varphi \in X^*,$$

nach dem Satz von Banach–Steinhaus 2.2 also $\sup_n \|T_n\|_\infty = \sup_n \|x_n\| < \infty$. □

Wir wollen nun der Frage nachgehen, welche Bedingungen ein Raum X notwendig erfüllen muss, damit das schwache Auswahlprinzip (4) gilt.

Definition 2.5 (Reflexivität)**.**
Seien X ein normierter Raum und $\imath : X \hookrightarrow X^{**}$ die kanonische Einbettung von X in X^{**} (vgl. Beweis von Kor. 2.4). Dann heißt X reflexiv, falls $\imath$ surjektiv, also $X^{**} = \imath(X)$ ist.

Wie bereits eingangs angekündigt, wollen wir uns überlegen, dass die reflexiven Räume genau diejenigen sind, in denen das schwache Auswahlprinzip gilt. Wir beginnen mit dem

Satz 2.6 (Reflexivität)**.**
Seien $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein Hilbert–Raum, (X, μ) ein Maßraum und $1 < p < \infty$.

i) H ist reflexiv.

ii) $L^p(X; \mu)$ ist reflexiv.

Beweis:

i) Sei $T \in H^{**}$, also eine lineare, stetige Abbildung $T : H^* \to \mathbb{R}$. Es ist zu zeigen, dass es ein $x \in H$ gibt mit $T = \imath_x$. Dazu bezeichne $R : H \to H^*$, $z \mapsto \langle z, \cdot\rangle$ den isometrischen Isomorphismus aus dem Satz von Riesz. Dann ist die Abbildung $S := T \circ R : H \to \mathbb{R}$ linear und stetig, also $S \in H^*$. Nach dem Satz von Riesz gibt es ein $x \in H$, so dass $S = Rx$ auf H. Dies bedeutet aber:

$$T\big(\langle z, \cdot\rangle\big) = Sz = \langle x, z\rangle \quad \text{für alle} \quad z \in H.$$

[4] Sind X und Y normierte Räume, so heißt eine Abbildung $\imath : X \to Y$ eine *Einbettung*, falls X Untervektorraum von Y und $\imath$ eine lineare Abbildung mit

$$\|\imath x\| \leq M\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

mit einer positiven Konstanten M ist. Die lineare Abbildung $\imath$ ist dann insbesondere stetig, weshalb man auch von einer *stetigen Einbettung* spricht. Man schreibt dann $X \hookrightarrow Y$.

Sei nun $\varphi \in H^*$ beliebig. Wiederum nach dem Satz von Riesz ist $\varphi = \langle z, \cdot \rangle$ für ein $z \in H$, und damit

$$T\varphi = T\big(\langle z, \cdot \rangle\big) = \langle x, z \rangle = \varphi(x) = \imath_x(\varphi),$$

woraus die Behauptung folgt.

ii) Nach Satz 1.17 ist $L^p(X;\mu) \cong L^p(X;\mu)^{**}$. Wir überlegen uns, dass diese Isomorphie von der kanonischen Einbettung herrührt. Für $s \in (1,\infty)$ sei $J_s : L^s(X;\mu) \to (L^{s^*}(X;\mu))^*$ mit $s^* := s/(s-1)$ definiert durch $J_s(u) = u^*$ mit

$$u^*(w) = \int_X uw\,d\mu \ \text{ für } w \in L^{s^*}(X;\mu).$$

Sei $T \in (L^p(X;\mu))^{**}$ und $q := p/(p-1)$. Wir betrachten $\phi \in (L^q(X;\mu))^*$ mit

$$\varphi(w) := T \circ J_q(w),\ w \in L^q(X;\mu).$$

Es folgt für $\psi \in (L^p(X;\mu))^*$,

$$T(\psi) = T(J_q(w)) = \varphi(w) = \int_X uw\,d\mu = J_q(w)(u) = \psi(u),$$

wobei $w \in L^q(X;\mu)$ und $u \in L^p(X;\mu)$ passend gewählt werden. Es gilt also $T = i_u$. $\square$

Wie der Beweis von Satz 2.6 ii) zeigt, kann weder $L^1(X;\mu)$ noch $L^\infty(X;\mu)$ i. a. reflexiv sein, da $L^1(X;\mu) \subsetneqq L^\infty(X;\mu)^*$ ist.

Bemerkung.
Jeder endlich–dimensionale Raum ist reflexiv.

Bevor wir den Zusammenhang zwischen der Reflexivität und dem schwachen Auswahlprinzip herstellen, verschaffen wir uns ein genaueres Verständnis von reflexiven Räumen, und stellen einige Hilfsmittel bereit. Das folgende Lemma ist als *Trennungssatz von Mazur* bekannt; es gilt allgemeiner in *lokal konvexen*, topologischen Räumen (vgl. etwa [Yo], § IV.6, Thm. 3) und ist eine weitere Version des Satzes von Hahn–Banach 1.20.
Die Beweise der folgenden Aussagen überlassen wir dem Leser als Übung.

Satz 2.7.
Seien X ein Banach–Raum und $U \subset X$ ein Unterraum.

i) Ist X reflexiv und U abgeschlossen, so ist auch U reflexiv.

ii) X reflexiv $\iff$ X^* reflexiv.

iii) Endliche Produkte reflexiver Räume sind reflexiv.

Ist X ein normierter Raum, so nennen wir eine Folge $(x_n) \subset X$ eine *schwache Cauchy–Folge*, falls $\big(\varphi(x_n)\big) \subset \mathbb{R}$ für alle $\varphi \in X^*$ eine Cauchy–Folge ist. Entsprechend heißt X *schwach vollständig*, wenn jede schwache Cauchy–Folge in X schwach konvergiert.

Satz 2.8 (Schwache Vollständigkeit)**.**
Jeder reflexive Raum X ist schwach vollständig.

Beweis: Sei $(x_n) \subset X$ eine schwache Cauchy–Folge. Betrachte die Folge $(T_n) \subset X^{**}$, die gegeben wird durch $T_n\varphi := \varphi(x_n)$ für jedes $\varphi \in X^*$. Nach Voraussetzung existiert $T\varphi := \lim_n T_n\varphi$ für alle $\varphi \in X^*$ und nach dem Satz von Banach–Steinhaus 2.2 ist $T \in X^{**}$. Da X reflexiv ist, ist daher $T = \imath_x$ für ein $x \in X$. Mithin ist

$$\lim_n \varphi(x_n) = \lim_n T_n\varphi = T\varphi = \imath_x(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in X^*,$$

d. h. (x_n) ist schwach konvergent. □

Wir sagen, ein normierter Raum X sei *separabel*, falls X eine abzählbare Teilmenge Ξ besitzt, so dass $\overline{\Xi} = X$ ist. Mit anderen Worten soll es eine in X dicht liegende Menge Ξ geben, die gleichzeitig abzählbar ist. Ein einfaches endlichdimensionales Beispiel ist $\mathbb{R}$, da $\mathbb{Q}$ ja bekanntlich dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Lemma 2.9 (Separabilität)**.**
Sei X ein normierter Raum und X^* separabel. Dann ist auch X separabel.

Beachte. Die Umkehrung der Aussage in Lemma 2.9 ist i. a. falsch).

Beweis von Lemma 2.9.
Seien $S^* := \big\{\varphi \in X^*;\ \|\varphi\|_\infty = 1\big\}$ und Ξ eine abzählbare Menge mit $X^* = \overline{\Xi}$. Dann ist auch $\Sigma := \big\{\varphi \in \Xi;\ \varphi \not\equiv 0\big\}$ abzählbar und es ist

$$S^* = \overline{\big\{\varphi/\|\varphi\|_\infty;\ \varphi \in \Sigma\big\}} =: \overline{\Sigma_0},$$

also S^* separabel. Schreiben wir $\Sigma_0 := \big\{\psi_1, \psi_2, \dots\big\}$, so gibt es zu jedem $\psi_k \in \Sigma_0$ $(k \in \mathbb{N})$ eine Folge $(x_n^k) \subset X$ mit den Eigenschaften:

$$\|x_n^k\| = 1 \quad \text{und} \quad \psi(x_n^k) \xrightarrow{n} \|\psi\|_\infty = 1. \tag{6}$$

Für $U := \overline{\operatorname{span}\big\{x_n^k;\ (k,n) \in \mathbb{N}^2\big\}}$ muss nun $U = X$ sein. Denn angenommen, es ist $U \subsetneqq X$. Dann existiert nach dem Satz von Hahn–Banach 1.20 ein $\psi \in S^*$ mit $\psi|_U = 0$. Andererseits gibt es ein $\psi_k \in S^*$ mit $\|\psi - \psi_k\|_\infty \le \frac{1}{2}$, so dass

$$\big|\psi_k(x_n^k)\big| = \big|(\psi - \psi_k)(x_n^k)\big| \le \frac{1}{2}$$

ist, im Widerspruch zu (6). □

Wir kommen zum Hauptergebnis dieses Kapitels:

Satz 2.10 (Schwache Kompaktheit)**.**
Jeder reflexive Raum X ist schwach (folgen–) kompakt, d. h. es gilt das schwache Auswahlprinzip (4).

Beweis: Sei $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge.

i) Sei zunächst X^* separabel, d. h. $X^* = \overline{\Xi}$ für eine abzählbare Menge Ξ. Dann gibt es eine abzählbare Menge $\Xi := \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\} \subset H$, so dass $\overline{\Xi} = H$ ist. Wegen $\sup_n \|x_n\| < \infty$ ist $\xi_1(x_n)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß existiert daher der Limes

$$\alpha^1 := \lim_n \xi_1(x_n^1)$$

für eine Teilfolge (x_n^1) von (x_n). Desweitern können wir aus (x_n^1) eine Teilfolge (x_n^2) wählen, so dass auch

$$\alpha^2 := \lim_n \xi_2(x_n^2)$$

existiert. Sukzessive so fortfahrend erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Folge (x_n^k), so dass

$$\alpha^k := \lim_n \xi_k(x_n^k)$$

existiert, wobei (x_n^k) eine Teilfolge von (x_n^{k-1}) ist (setze $(x_n^0) := (x_n)$). Wir betrachten nun die Diagonalfolge $(\zeta_n) := (x_n^n)$. Dieselbe ist ab einem gewissen Index $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge von (x_n^k), und daher

$$\alpha^k = \lim_n \xi_k(\zeta_n) \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}, \ . \tag{7}$$

Seien nun $M := \sup_j \|x_j\|$, $\xi \in X^*$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da Ξ nach Voraussetzung dicht in X^* liegt, können wir ξ_k ($k \in \mathbb{N}$ fest) so wählen, dass

$$\|\xi - \xi_k\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

ausfällt. Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir dann mittels der Ungleichung von Cauchy–Schwarz die Abschätzung

$$\begin{aligned}\big|\xi(\zeta_m) - \xi(\zeta_n)\big| &\leq \big|\xi_k(\zeta_m) - \alpha^k\big| + \big|\xi_k(\zeta_n) - \alpha^k\big| \\ &\quad + \big|(\xi - \xi_k)(\zeta_m)\big| + \big|(\xi - \xi_k)(\zeta_n)\big| \\ &\leq \big|\xi_k(\zeta_m) - \alpha^k\big| + \big|\xi_k(\zeta_n) - \alpha^k\big| + \varepsilon,\end{aligned}$$

weil offenbar $\|\zeta_n\| \leq M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist. Zusammen mit (7) ergibt sich daraus, dass $\big(\xi(\zeta_n)\big) \subset \mathbb{R}$ für jedes $\xi \in X^*$ eine Cauchy–Folge ist, so dass also $\lim_n \xi(\zeta_n)$ für jedes $\xi \in X^*$ existiert. und daher die Behauptung mit Satz 2.8.

ii) Sei nun X^* beliebig, und für eine Folge $(\varphi_n) \subset X^*$ sei

$$U := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{N}\}}.$$

Dann ist U separabel und als abgeschlossener Unterraum des reflexiven Raumes X^* selbst reflexiv (Satz 2.7). Also ist $U^{**} = \imath(U)$ separabel, und damit nach Lemma 2.9 auch U^*. Wie in i) erhält man eine Teilfolge von (x_n) (o. E. (x_n) selbst) und ein $x \in U$ mit $\varphi(x_n) \overset{n}{\to} \varphi(x)$ für alle $\varphi \in U^*$. Sei nun $\psi \in X^*$ beliebig. Dann ist $\varphi := \psi|_U \in U^*$ und es gilt

$$\psi(x_n) = \varphi(x_n) \overset{n}{\to} \varphi(x) = \psi(x),$$

d. h. $x_n \overset{n}{\rightharpoonup} x$ in X. $\square$

Wir kommen nun zu den für uns wichtigen L^p–Räumen. Zunächst bemerken wir, dass aufgrund von Satz 1.17 folgendes gilt: Seien $(u_n) \subset L^p(X;\mu)$ eine Folge und $u \in L^p(X;\mu)$, wobei $1 \leq p < \infty$ ist. Dann ist

$$u_n \overset{n}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^p(X;\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \int_X u_n \varphi \, d\mu \overset{n}{\to} \int_X u\varphi \, d\mu \\ \\ \text{für alle} \quad \varphi \in L^{p'}(X;\mu). \end{array}\right. \tag{8}$$

Damit bekommt man aus Satz 2.10 (in Verbindung mit Satz 2.6):

Korollar 2.11 (Schwache Kompaktheit von L^p).
Seien (X,μ) ein Maßraum, $1 < p < \infty$ und $(u_n) \subset L^p(X;\mu)$ eine beschränkte *Folge, d. h. es ist $\sup_n \|u_n\|_p < \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge $\big(u_{n_k}\big) \subset (u_n)$ und eine Funktion $u \in L^p(X;\mu)$, so dass (mit p' wie in (5))*

$$\int_X u\varphi \, d\mu = \lim_k \int_X u_{n_k}\varphi \, d\mu \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in L^{p'}(X;\mu), \tag{9}$$

d. h. es gilt: $u_{n_k} \overset{k}{\rightharpoonup} u$ in $L^p(X;\mu)$.

In Banach–Räumen (wie $\big(L^p(X;\mu), \|\cdot\|_p\big)$) gilt auch die Umkehrung von Satz 2.10 (vgl. dazu [Yo], App. Chap. V, § 4), womit also die Reflexivität genau das richtige Konzept ist, um die schwache Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft zu garantieren:

Satz 2.12 (Eberlein–Shmulyan).
Sei X ein Banach–Raum. Dann ist X reflexiv genau dann, wenn in X die schwache Bolzano–Weierstraß–Eigenschaft (4) *gilt.*

Demnach ist die Aussage von Korollar 2.11 äquivalent zur Reflexivität von L^p ($p \in (1,\infty)$). Da weder L^1 noch L^∞ reflexiv sind, zeigt dies umgekehrt, dass diese Aussage nicht für $p = 1$ bzw. $p = \infty$ gelten kann.

Schlussbemerkung.
Alle Aussagen über die Räume $L^p(\Omega)$ in diesem § gelten natürlich auch für die vektoriellen Räume $L^p(\Omega)^D$.

Kapitel 3

Schwache Differenzierbarkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand (z. B. Ω ein beschränktes Lipschitz–Gebiet). Wir betrachten das Dirichlet–Problem zur Poisson–Gleichung: Gesucht ist eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Randwertproblems

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = f \quad &\text{auf} \quad \Omega; \\ u = 0 \quad &\text{auf} \quad \partial\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

mit einer vorgegebenen Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Wie man leicht nachrechnet, genügt eine Lösung u von (1) der Beziehung

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx = -\int_\Omega f\eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Dabei wird durch die linke Seite von (2) ein Skalarprodukt β auf $C_0^1(\Omega)$ induziert, während die rechte Seite als stetige lineare Abbildung von $C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, also als ein Element von $C_0^1(\Omega)^*$, aufgefasst werden kann. Es läge nun nahe, den Darstellungssatz von Riesz anzuwenden, um die Existenz einer Lösung zu zeigen. Diesen kann man hier jedoch nicht benutzen, da der Raum $C_0^1(\Omega)$ bzgl. β kein Hilbert–Raum ist. Wir suchen also einen Funktionenraum $\mathscr{H}(\Omega)$ mit $C_0^1(\Omega) \subsetneq \mathscr{H}(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$ der bezüglich der durch β induzierten Norm vollständig ist. Der Ausweg besteht dabei im wesentlichen in einer Abschwächung des Differenzierbarkeitsbegriffs: Da in dem Skalarprodukt β die Ableitungen nicht punktweise ausgewertet, sondern nur integriert werden, ergibt sich ein gewisser Spielraum. (Den genannten Hilbert–Raum werden wir erst im folgenden § erklären.)

Wir wollen uns nun ein vernünftiges Konzept für die sog. *schwache Ableitung* einer Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, überlegen.

i) Zunächst kann man versuchen, die klassische Ableitung abzuschwächen in der Art, dass man ihre Existenz nur f. ü. auf Ω verlangt: Sei also ∇u f. ü. auf Ω vorhanden und es sei $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$. Hat auch $w : \Omega \to \mathbb{R}$ diese Eigenschaft, so ist $\beta(u, w)$, gegeben durch die linke Seite von (2), wohldefiniert (Warum?).
Jedoch gehen bei dieser Begriffsbildung entscheidende Zusammenhänge zwischen u und ∇u verloren: Sei etwa $u := \mathbb{1}_{(0,\infty)}$. Dann existiert $u'(x)$ für alle $x \neq 0$ und es ist $u' = 0$ $\mathcal{L}^1$–f. ü. auf $\mathbb{R}$. Bei dieser Begriffsbildung impliziert $\nabla u = 0$ also nicht unbedingt — wie man erwarten würde —, dass u konstant ist. Das ist wenig sinnvoll.

ii) Seien $u \in C^1(\Omega)$, $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)$ für ein Teilgebiet $\omega \Subset \Omega$. Dann ist der *Differenzenquotient*

$$\Delta_\gamma^h u(x) := \frac{u(x + he_\gamma) - u(x)}{h} \quad (x \in \Omega) \tag{3}$$

von u in Richtung e_γ wohldefiniert auf Ω und es gilt:

$$\Delta_\gamma^h u \xrightarrow{h \to 0} \partial_\gamma u \quad \text{lokal gleichmäßig auf } \Omega.$$

Dies lässt sich nun leicht zu einem vernünftigen Konzept für die „Ableitung" einer Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ausbauen: Man verlangt die Existenz von Funktionen $w_1, \ldots, w_d \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit

$$\Delta_\gamma^h u \xrightarrow{h \to 0} w_\gamma \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega),$$

und nennt w_γ die γ–te *schwache (partielle) Ableitung* von u und $w := (w_1, \ldots, w_d)$ die *schwache Ableitung (Gradient)* von u. Leider ist diese Definition etwas unhandlich, wir werden später aber sehen, dass sie das Richtige leistet (siehe Satz 3.10).

iii) Für $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$ seien $u, w_\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$. Es wäre sinnvoll w_γ als die γ–te schwache partielle Ableitung von u anzusprechen, falls eine Folge $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ existiert mit

$$u_n \xrightarrow{n} u \quad \text{und} \quad \partial_\gamma u_n \xrightarrow{n} w_\gamma \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$

Natürlich muss man sich dabei davon überzeugen, dass diese Begriffsbildung nicht von der speziellen Folge abhängt. Auch diese Definiton leistet das Gewünschte (werden wir in der Nachfolgeveranstaltung sehen), ist jedoch ebenfalls unhandlich.

iv) Das folgende Konzept der „Distributionsableitung" ist begrifflich am einfachsten zu verstehen und gleichzeitig — wie der Name schon andeutet — auf viel allgemeinere Situationen anwendbar.
Seien $u \in C^1(\Omega)$, $w_\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$, so dass gilt:

$$\int_\Omega u\, \partial_\gamma \eta\, dx = -\int_\Omega w_\gamma \eta\, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4}$$

Partielle Integration liefert dann:

$$\int_\Omega \partial_\gamma u\, \eta\, dx = \int_\Omega w_\gamma \eta\, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Also ist nach dem Fundamentallemma 1.25 $w_\gamma = \partial_\gamma u$. Die linke Seite von (4) macht auch für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ Sinn, und motiviert die folgende Definiton.

Definition 3.1 (Schwache Differenzierbarkeit)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und $k \in \mathbb{N}_0$, und seien $u, w^\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann heißt w^γ die γ–te schwache (partielle) Ableitung von u, falls gilt

$$\int_\Omega u\, \partial^\gamma \eta\, dx = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega w^\gamma \eta\, dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega); \tag{5}$$

u heißt k–mal schwach differenzierbar *auf* Ω, *falls für jedes* $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\gamma| \leq k$ *eine Funktion* $w^\gamma \in L^1_{loc}(\Omega)$, *welche der Beziehung (5) genügt, existiert. Den Raum aller k–mal auf* Ω *schwach differenzierbaren Funktionen* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *bezeichnen wir mit* $W^k(\Omega)$. *Insbesondere sei* $W^0(\Omega) := L^1_{loc}(\Omega)$.

Bemerkung 3.2.

i) *In Definition 3.1 genügt es zu verlangen, dass (5) für alle Funktionen* $\eta \in C_\circ^{|\gamma|}(\Omega)$ *gilt. Ferner lassen sich die obigen Konzepte auch in* L^p_{loc} *statt* L^1_{loc} *sowie für vektorwertige Funktionen (komponentenweise) formulieren. Die entsprechenden Räume vektorieller, schwach differenzierbarer Funktionen bezeichnen wir wie üblich mit* $W^k(\Omega)^D = W^k(\Omega, \mathbb{R}^D)$. *Die Eigenschaften der skalaren Räume* $W^k(\Omega)$ *übertragen sich sinngemäßauf* $W^k(\Omega)^D$.

ii) *Per Definition ist* $W^k(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, *d. h. schwach differenzierbare Funktionen sind Äquivalenzklassen* $\mathcal{L}^d$*–messbarer Funktionen* $\Omega \to \mathbb{R}$. *Zu* $u \in W^k(\Omega)$ *gibt es höchstens einen stetigen Vertreter (die Gleichheit in* Ω *bis auf eine Nullmenge stetiger Funktionen impliziert Gleichheit überall in* Ω*). Allgemein haben schwach differenzierbare Funktionen keine stetigen Vertreter.*

iii) *Hat* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *eine* $|\gamma|$*–te schwache Ableitung* w^γ, *so ist diese nach dem Fundamentallemma 1.25 eindeutig bestimmt, und man schreibt wie üblich wieder* $\partial^\gamma u$ *statt* w^γ, *sofern sich die genaue Bedeutung von* $\partial^\gamma u$ *aus dem Kontext erschließt. Ebenso verwendet man alle anderen Bezeichnungen aus der klassischen Differentialrechnung für schwach differenzierbare Funktionen.*

iv) *Es ist* $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$, *und die schwachen Ableitungen einer* C^k*–Funktion stimmen mit den klassischen Ableitungen überein (bzw. werden von jenen erzeugt).*

v) *Eine Funktion u gehört genau dann zur Klasse* $W^1(\Omega)$, *falls gilt:*

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \eta \, dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_\circ^\infty(\Omega)^d.$$

Entsprechend ist $u \in W^1(\Omega)^D$, *falls gilt:*

$$\int_\Omega u \cdot \operatorname{div} \eta \, dx = - \int_\Omega \nabla u : \eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_\circ^\infty(\Omega)^{dD}.$$

Dabei bezeichnet für $w := (w_\nu)_{\nu=1,\ldots,D}$ *jetzt* ∇w *die (schwache) Jacobi–Matrix* $\big(\partial_\gamma w^\nu\big)_{\substack{\gamma=1,\ldots,d\\ \nu=1,\ldots,D}} \in \mathbb{R}^{d\times D} \cong \mathbb{R}^{dD}$ *und* $\operatorname{div} w$ *steht für die (schwache) vektorielle Divergenz:*

$$\operatorname{div} w := \left(\sum_{\gamma=1}^d \operatorname{div} w^\nu \right)_{\nu=1,\ldots,D} \in \mathbb{R}^D.$$

vi) *Es gibt Funktionen* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *die weder klassisch noch schwach differenzierbar sind. Einfache Beispiele liefern charakteristische Funktionen.*

Funktion mit $u \in C^1\big(\Omega \setminus \{\xi\}\big)$. Dann ist i. a. sowohl $u \notin L^1_{loc}(\Omega)$ als auch $\nabla u \notin L^1_{loc}(\Omega)^d$, wobei ∇u die auf $\Omega \setminus \{\xi\}$ existierende klassische Ableitung von u bezeichnet. Ferner braucht eine bis auf eine Stelle stetig differenzierbare Funktion auch nicht in $W^1(\Omega)$ zu sein.

Lemma 3.3.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\xi \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x-\xi|^s} & ; \quad x \neq \xi \\ 0 & ; \quad x = \xi. \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt dann:

$$u \in W^k(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad s < d - k.$$

Wir haben gesehen, dass es Funktionen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt, die nicht schwach differenzierbar auf Ω sind. Das bedeutet, es gibt keine Funktion $w \in L^1_{loc}(\Omega)$, welche der Beziehung

$$\int_\Omega u\,\partial_\gamma \eta\,dx = -\int_\Omega w\eta\,dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\circ(\Omega)$$

($\gamma \in \{1, \ldots, n\}$) genügt. Die linke Seite dieser Gleichung ist für jede Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ wohldefiniert und induziert eine stetige lineare Abbildung auf $C^\infty_0(\Omega)$. Es liegt daher nahe, diesen linearen Operator als Ersatz für die fehlende schwache (partielle) Ableitung zu nehmen; diese „Ableitung“ von u bezeichnet man dann als *distributionelle (partielle) Ableitung* von u.
Hinter diesem Begriff steckt das allgemeinere Konzept der *Distribution*, was im Prinzip nur ein anderer Begriff für eine stetige lineare Abbildung auf $C^\infty_0(\Omega)$ ist. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\omega \Subset \Omega$ sei

$$C^\infty_\omega(\Omega) := \big\{\eta \in C^\infty_0(\Omega);\ \operatorname{spt}\eta \Subset \omega\big\}.$$

Definition 3.4 (Distribution)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Distribution T auf Ω ist eine Abbildung $T : C^\infty_\circ(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

i) T ist linear.

ii) T ist stetig im folgenden Sinn: Zu jedem $\omega \Subset \Omega$ existiert ein $k = k(\omega) \in \mathbb{N}_0$ und ein $c = c(\omega) \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

$$|T\eta| \le c \sum_{|\gamma| \le k} \|\partial^\gamma \eta\|_{\infty;\omega} \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\omega(\Omega).$$

Dabei heißt die kleinste Zahl k mit dieser Eigenschaft die Ordnung der Distribution. Den Raum aller Distributionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathscr{D}(\Omega)$, und den Unterraum der Distributionen der Ordnung $\le k \in \mathbb{N}_0$ auf Ω mit $\mathscr{D}^k(\Omega)$.

Bemerkung 3.5.
Aus Bedingung i) in Definition 3.4 folgt i. a. nicht die Stetigkeit von T, da $C^\infty_\circ(\Omega)$ unendlichdimensional ist. Die Bedingung ii) aus der Definition besagt, dass $T\eta$ auf jedem fixierten Kompaktum ω gleichmäßig *durch eine gewisse Zahl von Ableitungen kontrolliert werden kann, vorausgesetzt, dass* $\operatorname{spt}\eta \Subset \omega$ *ist.*
Offenbar ist die in ii) geforderte Bedingung gleichbedeutend mit

$$|T\eta| \le c \sup_{|\gamma| \le k} \|\partial^\gamma \eta\|_{\infty;\omega} \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C^\infty_\omega(\Omega)$$

(was man in der Literatur auch als Defintion findet). Tatsächlich kann man zeigen (vgl. etwa [Alt], § 3.10):

$$\mathscr{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)^* \quad \textit{und} \quad \mathscr{D}^k(\Omega) = C_\circ^k(\Omega)^*,$$

wenn man $C_0^\infty(\Omega)$ bzw. $C_\circ^k(\Omega)$ mit einer geeigneten Topologie versieht. Man beachte, dass ii) a priori nicht die Stetigkeit von T im Sinne von Definition 1.12 liefert: Zwar wird durch die rechte Seite eine Norm auf $C_0^\infty(\Omega)$ erklärt, aber man verlangt die Gültigkeit der Bedingung nur auf den Teilklassen $C_\omega^\infty(\Omega)$ und die Konstante c hängt von dem gewählten ω ab.

Beispiel:

i) Für eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sei $T_u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$T_u\eta := \int_\Omega u\eta\, dx.$$

Dann ist T linear und für $\omega \Subset \Omega$ ist

$$|T_u\eta| \leq \int_\omega |u\eta|\, dx \leq \|u\|_{1;\omega}\|\eta\|_{\infty;\omega} \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_\omega^\infty(\Omega),$$

also $T_u \in \mathscr{D}^0(\Omega)$. Die Distribution T_u heißt die von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ erzeugte reguläre Distribution, und wird auch mit $\langle u, \cdot\rangle$ (nicht zu verwechseln mit einem Skalarprodukt!) bezeichnet. Diese ist nach dem Fundamentallemma 1.25 durch u eindeutig bestimmt.

(ii) Sei μ ein Radon–Maß über Ω. Dann ist

$$\left|\int_\Omega \eta\, d\mu\right| \leq \|\eta\|_\infty\, \mu(\operatorname{spt}\eta) < \infty,$$

so dass durch $T_\mu : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$T_\mu\eta := \int_\Omega \eta\, d\mu$$

eine Distribution der Ordnung 0 auf Ω erklärt wird. Eine „Umkehrung“ davon stellt der noch folgende Satz 3.7 dar.

Definition 3.6 (Reguläre/Singuläre Distribution)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Distribution auf Ω. Dann heißt T regulär, falls es eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt, so dass

$$T\eta = \langle u, \eta\rangle := \int_\Omega u\eta\, dx \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

ist. Sonst heißt T singulär.

Beispiel:

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\xi \in \Omega$. Dann wird durch $T_\xi : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\eta \mapsto \eta(\xi)$ eine Distribution der Ordnung 0 erklärt. Diese ist bekannt als *Dirac–Distribution*, und

wird mit δ_ξ bezeichnet.
Durch Betrachtung der Funktionen $\eta_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\eta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{|x-\xi|^2-\varepsilon^2}\right) & ; \quad x \in B_\varepsilon(\xi) \\ 0 & ; \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\varepsilon \in \big(0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\big)$ ist, kann man zeigen, dass δ_ξ singulär ist.
Eine weitere wichtige Charakterisierung von Distributionen liefert der folgende Satz. Dieser sagt im wesentlichen aus, dass der Raum der Distributionen der Ordnung 0 auf Ω mit dem Raum $\mathscr{M}(\Omega)$ der Radon–Maße über Ω übereinstimmt:

$$\mathscr{D}^0(\Omega) = C^0_\circ(\Omega)^* = \mathscr{M}(\Omega)$$

ist. (Mehr dazu findet man etwa in [Al], § 2.7 oder [AFP], § 1.4.)

Satz 3.7.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $T \in \mathscr{D}^0(\Omega)$. Dann gibt es $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\Omega)$ mit

$$T\eta = \langle \mu, \eta \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \quad \textit{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir wollen nun erklären, was wir unter der Ableitung einer Distribution, der sog. *Distributionsableitung* verstehen wollen. Zur Motivation betrachten wir eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Für jedes $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ ist dann nach der Regel der partiellen Integration

$$\int_\Omega u\, \partial^\gamma \eta \, dx = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega \partial^\gamma u\, \eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_0^\infty(\Omega),$$

wobei die linke Seite für jede Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ wohldefiniert ist, und eine stetige, lineare Abbildung auf $C_0^\infty(\Omega)$ induziert. Dies gibt Anlass zu der

Definition 3.8 (Distributionelle Ableitung)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $T \in \mathscr{D}(\Omega)$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist die distributionelle (partielle) Ableitung $\partial^\gamma T$ von T definiert durch die Distribution

$$\big(\partial^\gamma T\big)\eta := (-1)^{|\gamma|}\, T\big(\partial^\gamma \eta\big) \quad (\eta \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Demnach ist jede Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ beliebig oft *distributionell* (oder im Sinne von Distributionen) differenzierbar mit *distributionellen (partiellen) Ableitungen*

$$\langle \partial^\gamma u, \cdot \rangle := \partial^\gamma \langle u, \cdot \rangle \quad (\gamma \in \mathbb{N}_0^d).$$

Ferner gilt offenbar:

$$u \in W^k(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in L^1_{loc}(\Omega),\ \langle \partial^\gamma u, \cdot \rangle \text{ regulär für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^d \text{ mi } |\gamma| \le k.$$

Beispiel:
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u := (u_1, \dots, u_d) \in L^1_{loc}(\Omega)^d$. Dann definiert man die distributionelle Divergenz durch die Distribution

$$\langle \operatorname{div} u, \cdot \rangle := \sum_{k=1}^d \langle \partial_k u_k, \cdot \rangle.$$

Für jede Funktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ ist

$$\langle \operatorname{div} u, \cdot \rangle = -\sum_{k=1}^{d} \langle u_k, \partial_k \eta \rangle = -\sum_{k=1}^{d} \int_\Omega u_k\, \partial_k \eta \, dx = -\int_\Omega u \cdot \nabla \eta \, dx.$$

Auf analoge Weise kann man den distributionellen Laplace–Operator einer Funktion $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ erklären, und kann zeigen, dass dieser im Falle $w \in W^1(\Omega)$ mit $\langle \operatorname{div} \nabla w, \cdot \rangle$ übereinstimmt — wie es sein sollte.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Eine Familie (ω_m) $(m \in \mathbb{N})$ offener Mengen in Ω heißt eine *Ausschöpfung* von Ω, falls gilt:

$$\omega_m \Subset \omega_{m+1} \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \omega_m.$$

Beispielsweise wird durch

$$\omega_m := B_m(0) \cap \left\{ x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m} \right\}$$

eine Ausschöpfung (ω_m) von Ω definiert.[1]
Der folgende Satz zeigt insbesondere (Teil iv)), dass die schwache Differenzierbarkeit (ähnlich wie die Differenzierbarkeit im klassischen Sinn) eine lokale Eigenschaft ist. Natürlich darf man den Bogen nicht überspannen, und von „punktweiser“ schwacher Differenzierbarkeit sprechen, die es ja nicht geben kann (wir haben es ja mit Äquivalenzklassen von Funktionen zu tun).

Satz 3.9 (Schwache Differenzierbarkeit).
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) u besitzt auf Ω eine γ–te schwache (partielle) Ableitung $\partial^\gamma u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

ii) Für jede offene Menge $\omega \subset \Omega$ hat $u|_\omega$ auf U eine γ–te schwache (partielle) Ableitung mit $\partial^\gamma\big(u|_\omega\big) = \big(\partial^\gamma u\big)|_\omega$ auf ω.

iii) Für jede Ausschöpfung (ω_m) von Ω hat $u|_{\omega_m}$ eine γ–te schwache (partielle) Ableiung auf ω_m.

iv) Zu jedem $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $\omega \subset \Omega$, so dass $u|_\omega$ eine γ–te schwache (partielle) Ableitung auf ω besitzt, d. h. u hat lokal auf Ω eine γ–te schwache Ableitung.

Beweis: Die Implikationen i) $\Rightarrow$ ii), iii), iv) sind trivial (man wertet die definierende Integralrelation nur mit Funktionen mit kompakten Träger in einer kleineren offenen Menge aus). Die Richtung ii) $\Rightarrow$ iii) ergibt sich durch Spezialisierung. Wir beweisen die noch fehlenden Implikationen:
Ad iii) $\Rightarrow$ i). Sei (ω_m) eine Ausschöpfung von Ω. Nach Voraussetzung existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Funktion $w_m \in L^1_{loc}(\omega_m)$ mit

$$\int_{\omega_m} u\, \partial^\gamma \eta \, dx = (-1)^{|\gamma|} \int_{\omega_m} w_m \eta \, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in C_\circ^\infty(\omega_m). \tag{6}$$

[1] Man beachte, dass man für beschränktes Ω in der Definiton der ω_m den Schnitt mit der Kugel $B_m(0)$ fortlassen kann.

Nach dem Fundamentallemma 1.25 ist dann aber $w_m = w_{m+1}$ f. ü. auf ω_m für alle $m \in \mathbb{N}$. Für $x \in \omega_m$ sei $w(x) := w_m(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ und sei $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\operatorname{spt}\eta \Subset \omega_m$ ist, woraus mit (6) die Behauptung folgt.
Ad iv) $\Rightarrow$ i). Schreibe $\Omega = \bigcup_m \omega_m$ mit offenen Mengen ω_m, auf denen $\partial^\gamma u$ existiert. Zunachst erhält man zu $x \in \Omega$ eine Umgebung $V(x)$ auf der u schwach difffabr ist und $\Omega = \bigcup_x V(x)$ und wählt abzählbar viele Punkte x_m mit $\Omega = \bigcup_m V(x_m)$. Weiter sei $(\eta_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ eine *Zerlegung der Eins* (auch: $C_\circ^\infty$*–Zerlegung der Eins*) für Ω bzgl. (ω_m), i. e.:

$$0 \le \eta_k \le 1 \text{ in } \Omega \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } m_k \in \mathbb{N} \text{ mit } \operatorname{spt}\eta_k \Subset \omega_{m_k}. \tag{8}$$

$$\sharp\big\{k \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt}\eta_k \cap \omega \neq \emptyset\big\} < \infty \text{ für alle } \omega \Subset \Omega. \tag{9}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \equiv 1 \text{ in } \Omega. \tag{10}$$

Dabei sind in (9) immer nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind. (Vgl. dazu etwa [Ad], Thm. 3.14 oder [Yo], § I.12.)
Ist nun $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, so ist nach (8) $\operatorname{spt}\eta \cap \operatorname{spt}\eta_k \neq \emptyset$ nur für endlich viele $k \in \mathbb{N}$ und wegen (9) folgt

$$\int_\Omega u\, \partial^\gamma \eta\, dx = \int_\Omega u\, \partial^\gamma \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta\eta_k\right) dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega u\, \partial^\gamma \big(\eta\eta_k\big)\, dx. \tag{11}$$

Nun ist $\operatorname{spt}(\eta\eta_k) \Subset \omega_{m_k}$ für ein $m_k \in \mathbb{N}$ (gem. (7)) und es existiert eine Funktion $w_k \in L^1_{loc}(\omega_{m_k})$ derart, dass gilt:

$$\int_{\omega_{m_k}} u\, \partial^\gamma \eta\, dx = (-1)^{|\gamma|} \int_{\omega_{m_k}} w_k \eta\, dx \quad \text{für alle} \quad \eta \in L_o^\infty(\omega_{m_k}).$$

Mit (11) folgt, dass u auf Ω eine γ–te schwache (partielle) Ableitung besitzt, nämlich $w := \sum_k w_k \eta_k \in L^1_{loc}(\Omega)$. □

Wir geben noch die folgenden Charakterisierungen der schwachen Differenzierbarkeit an, die den Zusammenhang zu den zu Beginn des Kapitels hergeleiteten Zugängen herstellen. Insbesondere sei an die Differenzenquotienten $\Delta_\gamma^h u$ aus (3) erinnert.

Satz 3.10 (Schwache Ableitung)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$ und $u, w \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

i) w ist die γ–te schwache (partielle) Ableitung von u auf Ω, also $w = \partial_\gamma u$.

ii) Es gibt eine Folge $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_n \overset{n}{\to} u \quad \text{und} \quad \partial_\gamma u_n \overset{n}{\to} w \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$

iii) Für $0 < |h| \ll 1$ ist $\Delta_\gamma^h u$ $\mathcal{L}^d$–f. ü. in Ω definiert und es strebt

$$\Delta_\gamma^h u \xrightarrow{h \to 0} w \text{ in } L^1_{loc}(\Omega).$$

Beweis: Wir zeigen hier nur, dass ii) und iii) hinreichend für i) sind, die Umkehrung i) $\Rightarrow$ ii) beispielsweise wird sich später aus viel allgemeineren Sätzen (Konstruktion glatter Approximationen; GdV II) ergeben.
Ad ii) $\Rightarrow$ i). Sei $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann wird mit partieller Integration (Satz von Gauß)

$$\int_\Omega u_n \, \partial_\gamma \eta \, dx = - \int_\Omega \partial_\gamma u_n \, \eta \, dx,$$

mit $n \to \infty$, unter Beachtung von $\operatorname{spt} \eta \Subset \Omega$ und $\eta, \partial_\gamma \eta \in L^\infty(\Omega)$, also:

$$\int_\Omega u \, \partial_\gamma \eta \, dx = - \int_\Omega \partial_\gamma u \, \eta \, dx.$$

Ad iii) $\Rightarrow$ i). Seien $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ und $|h| \ll 1$ (so klein, dass $x + he_\gamma \in \Omega$ liegt für jedes $x \in \operatorname{spt} \eta$). Dann hat $\eta \, \Delta_\gamma^h u$ kompakten Träger in Ω und es gilt (nachrechnen!):

$$\int_\Omega \Delta_\gamma^h u \, \eta \, dx = - \int_\Omega u \, \Delta_\gamma^{-h} \eta \, dx.$$

Da η glatt ist, strebt natürlich $\Delta_\gamma^{-h} \eta \xrightarrow{h \to 0} \partial_\gamma \varphi$ gleichmäßig in Ω. Dies zusammen mit der Voraussetzung liefert i). □

Bemerkung 3.11.

i) Nach Satz 3.10 ist eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ genau dann in $W^1(\Omega)$, wenn eine der gleichwertigen Bedingungen ii) oder iii) aus dem Satz erfüllt ist.

ii) Analoge Aussagen gelten auch für höhere schwache Ableitungen.

Die Räume $W^k(\Omega)$ der k–mal auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ schwach differenzierbaren Funktionen, die wir im vorangegangenen Kapitel kennengelernt haben, sind ersichtlich lineare Räume. In diesem § wird es darum gehen, geeignete Unterräume auszuwählen, die wir mit einer vollständigen Norm versehen können. Dies geht so, dass man von Funktionen und ihren schwachen Ableitungen (bis zur Ordnung k) die Zugehörigkeit zu den Räumen $L^p(\Omega)$ mit einem $p \in [1, \infty]$ verlangt.

Definition 3.12 (Sobolev–Raum)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p \le \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt der lineare Raum

$$W^{k,p}(\Omega) := \Big\{ u \in W^k(\Omega);\ \partial^\gamma u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^k \text{ mit } |\gamma| \le k \Big\}$$

der Sobolev–Raum mit Differenzierbarkeitsstufe k und Integrabilitätsexponent p. (Insbesondere ist $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.) Auf $W^{k,p}(\Omega)$ betrachtet man die Norm:

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_{\Omega;k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\gamma| \le k} \left\| \partial^\gamma u \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad p < \infty \\ \max_{|\gamma| \le k} \left\| \partial^\gamma u \right\|_\infty & ; \quad p = \infty. \end{cases}$$

Die Elemente von $W^{k,p}(\Omega)$ heißen Sobolev–Funktionen.[2]

[2] Man erinnere sich daran, dass es sich bei den Elementen von $W^{k,p}(\Omega)$, die ja insbesondere Elemente von $L^1(\Omega)$ sind, eigentlich nicht um Funktionen, sondern um Äquivalenzklassen von Funktionen handelt (vgl. § 1). In der Literatur findet man häufig auch die Bezeichnungen $W_p^k(\Omega)$, $H^{k,p}(\Omega)$ oder $H_p^k(\Omega)$, wobei die „H–Notation" einen tieferliegenden Grund hat, wie wir später noch sehen werden (Satz von Meyers und Serrin). Ferner werden die Räume $W^{k,2}(\Omega)$ auch häufig mit $H^k(\Omega)$ bezeichnet, weil diese dadurch ausgezeichnet sind, dass sie Hilbert–Raum sind (s. u.).

Bemerkung 3.13.

i) Dass durch $\|\cdot\|_{k,p}$ tatsächlich eine Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ erklärt ist, zeigen einfache Rechnungen.

ii) Zu $\|\cdot\|_{k,p}$ äquivalente Normen auf $W^{k,p}(\Omega)$ werden gegeben durch:

$$\sum_{|\gamma|\le k} \left\|\partial^\gamma u\right\|_p \quad \textit{bzw.} \quad \max_{|\gamma|\le k} \left\|\partial^\gamma u\right\|_p$$

für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ (mit $1 \le p \le \infty$). Betrachet man die dadurch erklärten Normen, so ändern sich Konvergenzaussagen, Vollständigkeit oder andere topologische Begriffe natürlich nicht. Die von uns bevorzugte Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ hat den entscheidenden Vorteil, dass sie für $p = 2$ von dem durch

$$\langle u, v\rangle_k := \langle u, v\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\gamma|\le k} \int_\Omega \partial^\gamma u\, \partial^\gamma v\, dx$$

gegebenen Skalarprodukt auf $W^{k,2}(\Omega)$ herrührt.

Wir führen noch die folgende Bezeichnung ein, die uns später zum „Randverhalten“ von Sobolev–Funktionen führen wird. Zunächst ist völlig unklar, ob und wie man Sobolev–Funktionen „Randwerte“ zuordnen soll.

Definition 3.14.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p \le \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann bezeichnen wir mit $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ den Normabschluss des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ (also den Abschluss bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{k,p}$):

$$\mathring{W}^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}},$$

d. h. es ist $u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn es eine Folge $(\eta_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ gibt mit

$$\partial^\gamma \eta_n \xrightarrow{n} \partial^\gamma u \textit{ in } L^p(\Omega)$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$.[3]

Man kann zeigen, dass wie erwartet $\mathring{W} \subset W$ und $\mathring{W}^{0,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ist; ferner ist $\mathring{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) = W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.

Entsprechend zu den Lebesgue–Räumen, erklären wir auch für die Sobolev–Räume lokale sowie vektorielle Versionen: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p \le \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann setzt man:

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) := \Big\{u \in W^k(\Omega);\ \partial^\gamma u \in L^p_{loc}(\Omega) \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{N}_0^k \text{ mit } |\gamma| \le k\Big\}.$$ [4]

Insbesondere ist $W^k(\Omega) = W^{k,1}_{loc}(\Omega)$ (man erinnere sich an Satz 3.9, wonach eine L^1_{loc}–Funktion genau dann schwach differenzierbar auf Ω ist, wenn dies lokal auf Ω der Fall

[3] In der Literatur findet man häufig auch die Bezeichnungen $\mathring{W}^k_p(\Omega)$, $W^{k,p}_\circ(\Omega)$, $W^k_{p\,\circ}(\Omega)$ sowie entsprechende „H–Notationen“. Ferner sind die Bezeichnungen $\mathring{H}^k(\Omega)$ bzw. $H^k_\circ(\Omega)$ für die Hilbert–Räume $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$ gebräuchlich.

[4] Auch hier sind andere Bezeichnungen gebräulich: $W^k_{p,loc}(\Omega)$ bzw. entsprechende „H–Notationen“.

ist).
Für vektorwertige Funktionen $u := (u^1, \ldots, u^D) : \Omega \to \mathbb{R}^D$ $(D \in \mathbb{N})$ definieren wir:

$$W^{k,p}(\Omega)^D := W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^D) := \left\{ u \in L^p(\Omega)^D;\ \begin{array}{c} u^\nu \in W^{k,p}(\Omega) \text{ für alle} \\ \nu = 1, \ldots, D \end{array} \right\}$$

und versehen diesen Raum mit der Norm:

$$\|u\|_{k,p} := \|u\|_{\Omega;k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{\nu=1}^{D} \|u^\nu\|_{k,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad p < \infty \\ \max_{\nu=1}^{D} \|u^\nu\|_{k,\infty} & ; \quad p = \infty. \end{cases}$$

Schließlich erklärt man wie oben auch noch lokale Versionen $W^{k,p}_{loc}(\Omega)^D$ der Räume $W^{k,p}(\Omega)^D$ sowie den Raum $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)^D$. (Wie dies im Detail auszusehen hat, dürfte ersichtlich sein).

Satz 3.15.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p \le q \le \infty$ und $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \ge l$. Dann gilt:

i) Die Einbettugen

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sind linear und stetig.

ii) Ist $\mathcal{L}^d(\Omega) < \infty$, so ist die Einbettung

$$W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$$

stetig.

iii) Für $p < \infty$ liegt $W^{k,p}(\Omega)$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_p$) dicht in $L^p(\Omega)$.

Beweis: Die Aussage i) ist völlig trivial; bei der zweiten Einbettung „vergisst“ man einfach, dass die Funktionen auch schwache Ableitungen in $L^p(\Omega)$ besitzen. Die Aussage in ii) folgt sofort aus der Hölder–Ungleichung (Lem. 1.7 i)). Bleibt iii) nachzuweisen: Nach Satz 1.22 liegt sogar $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, aus

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \mathring{W}^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

folgt dann natürlich die Dichtheit von $W^{k,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$. □

Bemerkung 3.16.
Für $p = \infty$ ist iii) in Satz 3.15 falsch: Wie später gezeigt wird, besteht $W^{k,\infty}(\Omega)$ für $k \ge 1$ aus stetigen Funktionen. Läge also $W^{k,\infty}(\Omega)$ dicht in $L^\infty(\Omega)$, so hieße das: Jede Funktion $u \in L^\infty(\Omega)$ läßt sich bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ durch stetige Funktionen approximieren. Es gibt aber bekanntlich beschränkte Funktionen (L^∞–Funktionen), die man nicht gleichmäßig durch stetige Funktionen approximieren kann. (Etwa solche, die keinen stetigen Vertreter besitzen.)

Mit der Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ $(p < \infty)$ aus dem obigen Satz läßt sich nichts anfangen, da $W^{k,p}(\Omega)$ gem. Teil iii) von Satz 3.15 kein abgeschlossener Teilraum von $L^p(\Omega)$ ist. (Andernfalls folgte ja $W^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Wie wir wissen, gibt es aber

L^p–Funktionen, die nicht einmal schwach differenzierbar sind.) Andererseits übertragen sich die funktionalanalytischen Eigenschaften eines normierten Raumes (hier L^p) nur auf abgeschlossene Unterräume. Aus diesem Grund konstruieren wir eine andere Einbettung für $W^{k,p}(\Omega)$, welche den Ableitungseigenschaften Rechnung trägt: Seien $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ fixiert. Für

$$D := \sharp\big\{\gamma \in \mathbb{N}_0^d;\ |\gamma| \leq k\big\} \tag{12}$$

definieren wir eine Einbettung $\Phi : W^{k,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^D$ durch

$$\Phi u := \big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma|\leq k}, \tag{13}$$

wobei $\big(\partial^\gamma u\big)_{|\gamma|\leq k}$ o. E. in Zeilenform angeordnet sei. Für $k = 1$ hat man dann beispielsweise

$$\Phi u = \big(u, \partial_1 u, \dots, \partial_d u\big) = \big(u, \nabla u\big).$$

Offenbar ist $\|u\|_{k,p} = \|\Phi u\|_p$ für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$, und es gilt:

Satz 3.17.
Die durch (13) *definierte Einbettung* $\Phi : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)^D$ *ist eine lineare Isometrie und der Unterraum* $W^{k,p}(\Omega)$ *ist abgeschlossen in* $L^p(\Omega)^D$.

Beweis: Bis auf die Abgeschlossenheit sind alle Aussagen trivial. Wir zeigen diese exemplarisch für $k = 1$ und überlassen dem Leser den allgemeinen Fall. Sei also $(u_m) \subset W^{1,p}(\Omega)$ eine Folge, so dass $\Phi u_m = (u_m, \nabla u_m)$ in $L^p(\Omega)^{1+d}$ konvergiert, also

$$u_m \overset{m}{\longrightarrow}: u \text{ in } L^p(\Omega) \quad \text{und} \quad \nabla u_m \overset{m}{\longrightarrow}: v \text{ in } L^p(\Omega)^d$$

mit Funktionen $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^p(\Omega)^d$. Wir müssen zeigen, dass wieder $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ist. Offensichtlich muss dann gerade $\nabla u = v$ erfüllt sein. Sei dazu $\eta \in \mathring{C}^\infty(\Omega)^d$ beliebig. Dann ist

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \eta \, dx = \lim_m \int_\Omega u_m \operatorname{div} \eta \, dx = -\lim_m \int_\Omega \nabla u_m \cdot \eta \, dx = -\int_\Omega v \cdot \eta \, dx,$$

also ist u schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $\nabla u = v$, womit die Behauptung folgt. □

Damit übertragen sich nun die funktionalanalytischen Eigenschaften des Raumes $L^p(\Omega)^D$ (mit D wie in (12)) auf den Raum $W^{k,p}(\Omega)$. Man bekommt:

Korollar 3.18.
Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $W^{k,p}(\Omega)$ *ein Banach–Raum (bzgl. der Norm* $\|\cdot\|_{k,p}$*). Ferner sind* $W^{k,2}(\Omega)$ *sowie* $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$ *Hilbert–Räume bzgl. dem Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ *aus Bem. 3.13.*

Wir wollen nun klären, was schwache Konvergenz in $W^{k,p}(\Omega)$ bedeutet: Sei dazu eine Folge $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ vorgegeben. Per Definition bedeutet $u_m \overset{m}{\rightharpoonup}: u$ für eine Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$, dass

$$\varphi(u_m) \overset{m}{\longrightarrow} \varphi(u) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in W^{k,p}(\Omega)^*$$

strebt, was für konkrete Anwendungen aber zu unhandlich ist. Vermöge der Einbettung Φ gem. (13) lässt sich jedoch zeigen:

$$u_m \overset{m}{\rightharpoonup} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \partial^\gamma u_m \overset{m}{\rightharpoonup} \partial^\gamma u \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für alle } |\gamma| \le k,$$

so dass also schwache Konvergenz in $W^{k,p}(\Omega)$ komponentenweise schwache Konvergenz in $L^p(\Omega)^D$ (mit D gem. (12)) bedeutet. Als Anwendung des Satzes von Riesz für Lebesgue–Räume (Satz 1.17) ergibt sich (vgl. auch (8)):

Satz 3.19.
Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p < \infty$ und $u_m, u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:
i) $u_m \overset{m}{\rightharpoonup} u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.
ii) Für alle $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ (mit p' gem. (5)) gilt:

$$\int_\Omega \partial^\gamma u_m \, \varphi \, dx \overset{m}{\longrightarrow} \int_\Omega \partial^\gamma u \, \varphi \, dx.$$

Für $1 < p < \infty$ erhalten wir aus der Reflexivität von L^p (Satz 2.6) die Reflexivität von $W^{k,p}$, und damit wg. Satz 2.10 das folgende — für die Variationsrechnung wichtige — schwache Auswahlprinzip, das wegen der Irreflexivität von L^1 und L^∞ in den Räumen $W^{1,1}$ und $W^{1,\infty}$ nicht gilt. Diese sind umgekehrt nach dem Satz von Eberlein–Shmulyan (Satz 2.12) auch selbst irreflexiv.

Satz 3.20 (Schwaches Auswahlprinzip in $W^{k,p}$)**.**
Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $1 < p < \infty$ und $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ eine beschränkte Folge, d. h. es sei $\sup_m \left\|u_m\right\|_{k,p} < \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge $\left(u_{m_k}\right)$ von (u_m) und eine Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$, so dass gilt:

$$u_{m_k} \overset{k}{\rightharpoonup} u \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega).$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Folge (u_m) beschränkt in $L^p(\Omega)^D$ mit D gem. (12), so dass es nach dem schwachen Auswahlprinzip für L^p–Räume (Kor. 2.11) eine Teilfolge $\left(u_{m_k}\right)$ und eine Funktion $v \in L^p(\Omega)^D)$ gibt mit $u_{m_k} \overset{k}{\rightharpoonup} v$ in $L^p(\Omega)^D)$. Da aber $W^{1,p}(\Omega)$ normabgeschlossen in $L^p(\Omega)^D)$ ist (Satz 3.17), ist $W^{1,p}(\Omega)$ erstrecht schwach abgeschlossen in $L^p(\Omega)^D$ (Satz **??**), so dass v zu $W^{1,p}(\Omega)$ gehört, und damit die Folge $\left(u_{m_k}\right)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ schwach gegen v konvergiert. ☐

Bemerkung 3.21.
*Nach Definition ist $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ normabgeschlossen, und daher auch schwach abgeschlossen (Satz **??**) in $W^{k,p}(\Omega)$, d. h. ist $(u_m) \subset \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ und strebt*

$$u_m \overset{m}{\rightharpoonup}: u \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega)$$

mit einer Funktion $u \in W^{k,p}(\Omega)$, so ist auch $u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$.

Zum Abschluss dieses § betrachten wir für Funktionen $w : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit genügend glattem Rand) und $p \in (1, \infty)$ das Funktional

$$J[w] := \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx,$$

das offenbar für Funktionen $w \in W^{1,p}(\Omega)$ wohldefiniert ist. Mit den bisher erworbenen Kenntnissen sind wir in der Lage die Existenz eines eindeutigen Minimierers (bei gegebenen Randwerten) nachzuweisen. Dies stellt das finale Ziel der Vorlesung dar. Obiges Funktional soll in der Teilklasse

$$\mathscr{C} := \{w \in W^{1,p}(\Omega);\ w - u_0 \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)\} =: u_0 + \mathring{W}^{1,p}(\Omega)\},$$

mit einer fixierten Funktion $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, minimiert werden.[5] Wesentliche Hilfsmittel zum Beweis werden in den folgenden Lemmata erarbeitet:

Lemma 3.22.
Sei X ein normierter Raum, (x_k) konvergiere schwach gegen ein $x \in X$. Dann gibt es eine Folge (y_k), so dass y_k in der konvexen Hülle von $\{x_l,\ l \geq k\}$ liegt mit $y_k \to x$, $k \to \infty$.

Beweis: Sei M_i definiert als die konvexe Hülle von $\{x_i, x_{i+1}, ...\}$, $i \in \mathbb{N}$.
Nehmen wir an es gebe eine Zahl $\epsilon > 0$ mit $\|x - y\| \geq \varepsilon$ für alle $y \in M_1$. Wir definieren

$$L := \left\{z \in X : \exists u \in M_1 \text{ mit } \|z - u\| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

Dann gilt

1) $L \supset M_1$ und damit $\overline{L} \supset M_1$.
2) $\overline{L}$ ist konvex, da L konvex ist.
3) $x \notin \overline{L}$

Die Konvexität von L sieht man wie folgt: Seien $z_1, z_2 \in L$ und $0 \leq t \leq 1$. Man wähle $u_1, u_2 \in M_1$ mit

$$\|z_i - u_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Es folgt

$$\|tz_1 + (1-t)z_2 - \{tu_1 + (1-t)u_2\}\| \leq t\,\|z_1 - u_1\| + (1-t)\,\|z_2 - u_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt also $tz_1 + (1-t)z_2 \in L$, weshalb L konvex ist (man beachte, dass aufgrund der Konvexistät von M_1 mit u_1 und u_2 auch $tu_1 + (1-t)u_2$ in M_1 liegt).
Nach dem Trennungssatz (Satz **??**) existiert ein $\Phi \in X^*$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\Phi \leq \alpha$ auf $\overline{L}$ und $\Phi(x) > \alpha$, was im Widerspruch zur schwachen Konvergenz $x_k \to x$ steht.
Unsere Annahme war demnach falsch, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in M_1$ mit $\|x - y\| \leq \varepsilon$. M.a.W.: es existiert eine Folge $(v_k^1) \subset M_1$ mit

$$\|v_k^1 - x\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Wir definieren y_1 als das erste Folgenglied von (v_k^1) mit $\|v_k^1 - x\| \leq 1$. Weiter seien $y_1, ..., y_n$ konstruiert mit

$$y_i \in M_i, \quad \|y_i - x\| \leq \frac{1}{i}, \quad i = 1, ..., n.$$

Offenbar konvergiert auch die verschobene Folge $(x_{k+n})_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen x. Wiederholung des ersten Beweisteils angewendet auf $(x_{k+n})_{k\in\mathbb{N}}$ ergibt die Existenz einer Folge (w_l) Teilmenge der konvexen Hülle von $\{x_{1+n}, x_{2+n}, ...\} = M_{k+1}$ mit

$$\|w_l - x\| \to 0, \quad l \to \infty.$$

[5] Später werden wir sehen, dass $w \in u_0 + \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ gerade bedeutet, dass w verallgemeinerte Randwerte u_0 hat, also als „$w = u_0$ auf $\partial\Omega$“ interpretiert werden kann. Demnach wird durch $\mathscr{C}$ eine „Randwertbedingung“ realisiert.

Man wähle l_0 als kleinsten Index mit $\|w_l - x\| \leq \frac{1}{i+1}$ und setzt $y_{k+1} := w_{l_0}$. $\square$

Lemma 3.23.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand sowie $1 \leq p < \infty$.

a) Für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_p \leq c(\Omega) \, \|\nabla u\|_p \, .$$

b) Für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\|u - (u)_\Omega\|_p \leq c(\Omega) \, \|\nabla u\|_p \, , \quad (u)_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \int_\Omega u \, dx.$$

Beweis: a) Nehmen wir an die Ausage sei falsch. Dann finden wir eine Folge $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\|u_k\|_p \geq k \, \|\nabla u_k\|_p \, .$$

Definieren wir

$$v_k := \frac{u_k}{\|u_k\|_p} \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

so folgt

$$\|v_k\|_p = 1, \quad \|\nabla v_k\|_p \leq \frac{1}{k}. \tag{14}$$

Demnach ist (v_k) eine beschränkte Folge im reflexiven Raum $W^{1,p}(\Omega)$ (Satz 3.20), die eine schwach konvergente Teilfolge $(\widetilde{v}_k) \subset (v_k)$ besitzt, d.h.

$$\widetilde{v}_k \rightharpoonup: v \quad \text{in} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ schwach abgeschlossen (Bem. 3.21), also $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Es gilt wegen (14)

$$\nabla \widetilde{v}_k \to 0 \quad \text{in} \quad L^p(\Omega)$$

und damit $\nabla \widetilde{v}_k \rightharpoonup 0 \in L^p(\Omega)$. Die Endeutigkeit des schwachen Limes in $L^p(\Omega)$ impliziert $\nabla v = 0$ und damit ($v = 0$ auf $\partial\Omega$) $v = 0$. Wir benutzen an dieser Stelle die kompakte Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (beschränkte Folgen in $W^{1,p}(\Omega)$ haben Teilfolgen, die in $L^p(\Omega)$ stark konvergieren), die wir in Kapitel 5 beweisen werden. Nach erneuter Teilfolgenwwahl folgt

$$\widetilde{\widetilde{v}}_k \to v \quad \text{in} \quad L^p(\Omega)$$

und wir erhalten aus (14) $\|v\|_p = 1$ ein Widerspruch zu $v = 0$.
b) Vorgehen analog, man betrachte zunächst Funktionen mit

$$(u)_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Omega)} \int_\Omega u \, dx = 0$$

und erhält die gewünschte Ungleichung durch Subtrahieren des Mittelwerts. $\square$

Satz 3.24.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand sowie $1 < p < \infty$. Dann hat das Minimierungsproblem

$$J[w] := \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx \longrightarrow \min$$

in der Klasse $\mathscr{C}$ eine eindeutige Lösung.

Beweis: Wir betrachten eine Minimalfolge $(u_n) \subset \mathscr{C}$:

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \to \inf_{\mathscr{C}} J.$$

Offenbar gilt $\sup_n \|\nabla u_n\|_p < \infty$ und aus der Poincaré-Ungleichung Lemma 3.23 a) folgt

$$\begin{aligned} \|u_n\|_p &\le \|u_n - u_0\|_p + \|\nabla u_0\|_p \le c\,\|\nabla(u_n - u_0)\|_p + \|u_0\|_p \\ &\le c\,\|\nabla u_n\|_p + c\,\|u_0\|_{1,p}\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\sup_n \|u_n\|_p < \infty$ und insgesamt

$$\sup_n \|u_n\|_{1,p} < \infty.$$

Mit Satz 3.20 finden wir eine Teilfolge $(\widetilde{u}_n)$ mit

$$\widetilde{u}_n \rightharpoonup: u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Aufgrund der schwachen Abgeschlossenheit von $\mathscr{C}$ (vgl. Bem. 3.21) ist $u \in \mathscr{C}$. Zu zeigen bleibt also, dass u tatsächlich J-minimal ist. Dazu benutzen wir Lemma 3.22 und wählen eine Folge

$$\sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \widetilde{u}_i \in u_0 + W_0^{1,p}, \quad \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k = 1, \quad \alpha_i \ge 0,$$

die in $W^{1,p}(\Omega)$ stark gegen u konvergiert. Es folgt mit der Konvexität der Abbildung $t \mapsto t^p$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^p dx &= \lim_k \int_\Omega \Big| \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \nabla \widetilde{u}_i \Big|^p dx \le \lim_k \int_\Omega \Big(\sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k |\nabla \widetilde{u}_i| \Big)^p dx \\ &\le \lim_k \int_\Omega \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k |\nabla \widetilde{u}_i|^p dx = \inf_{\mathscr{C}} J. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleicheit aus

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_i|^p - \inf_{\mathscr{C}} J \Big| &= \Big| \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \Big(\, \|\nabla \widetilde{u}_i\|_p^p - \inf_{\mathscr{C}} J \Big) \Big| \\ &\le \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \Big| \, \|\nabla \widetilde{u}_i\|_p^p - \inf_{\mathscr{C}} J \Big| \\ &\le \sum_{i=k}^{N(k)} \alpha_i^k \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

für $n(k) \ge n_0$, da $(\widetilde{u}_i)$ Minimalfolge ist. Es gilt also

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \le \inf_{\mathscr{C}} J$$

und wegen $u \in \mathscr{C}$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \inf_{\mathscr{C}} J,$$

d.h. u is ein J-Minimierer. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit: Nehmen wir an es gebe zwei Minimierer $u_1, u_2 \in \mathscr{C}$. Da $\mathscr{C}$ konvex ist, gehört auch $\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ zur Klasse $\mathscr{C}$ und es folgt mir der strengen Konvexität der Abbildung $t \mapsto t^p$ für $p \in (1, \infty)$

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(\tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2\right)\right|^p dx < \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_2|^p dx = \inf_{\mathscr{C}} J,$$

ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung 3.25.

a) *Satz 3.24 lässt sich deutlich verallgemeiner: Sei $F : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ stetig und konvex, dann hat das Minimierungsproblem*

$$\int_\Omega F(\nabla w)\, dx \longrightarrow \min$$

in $\mathscr{C}$ eine Lösung (Ω wie in Satz 3.24), falls

$$F(Z) \geq c_0|Z|^p - c_1 \text{ für alle } Z \in \mathbb{R}^d$$

gilt (mit Konstanten $c_0 > 0$ und $c_1 \geq 0$). Falls F streng konvex ist, ist die Lösung eindeutig.

b) *Die Forderung der Konvexität ist sogar notwendig für die Existenz eines Minimierers, wie Acerbi und Fusco 1984 zeigen konnten (vgl. [Da]). Im Fall von vektorwertigen Mimimierern tritt an diese Stelle ein abgeschwächter Konvexitätsbegriff.*

Schlussbemerkung.

Alle Aussagen über die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ (oder deren Teilräume) können sinngemäßauf die Räume $W^{k,p}(\Omega)^D$ (bzw. deren Teilräume) übertragen werden.

Kapitel 4

Glättungen und Approximationssätze für Sobolev–Funktionen

Für viele Zwecke, wie beispielsweise den Beweis von Rechenregeln für Sobolev–Funktionen, ist es nützlich, Sobolev–Funktionen durch unendlich oft differenzierbare (also glatte) Funktionen zu approximieren. Wir werden hier ein sehr allgemeines Approximationsschema beschreiben und schließlich zu dem Ergebnis gelangen, dass für $p < \infty$ der Raum $W^{k,p}$ genau der Abschluss von C^∞ in $W^{k,p}$ ist. Dabei werden die Testfunktionen eine tragende Rolle spielen.

Definition 4.1 (Glättender Kern/Mollifier).
Eine C^∞–Funktion $\eta : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ mit $\operatorname{spt}\eta \subset \overline{B}_1(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \eta\, dx = 1$ heißt ein glättender Kern (oder Mollifier*) auf $\mathbb{R}^d$.*

Ein kanonisches Beispiel für einen glättenden Kern (sog. *Standard–Mollifier*) ist gegeben durch (vg. GdV übung 2)

$$\eta(x) := \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & ; \quad |x| < 1 \\ 0 & ; \quad \text{sonst,} \end{cases} \tag{1}$$

wobei $c = c(d) \in (0,\infty)$ so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^d} \eta\, dx = 1$ ausfällt.

Mittels einer *Faltung* wollen wir nun die *Glättung* einer L^1_{loc}–Funktion erklären. Zur Erinnerung: Für Funktionen $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ und $v \in C^0_\circ(\mathbb{R}^d)$ ist die Faltung $u * v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$u * v(x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, v(z-x)\, dz.$$

Nimmt man nun für u eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen) und für v die Funktion $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

mit einem glättenden Kern $\eta \in C^\infty_\circ(\mathbb{R}^d)$ und einem $\varepsilon > 0$, so ist die Faltung $u * \eta_\varepsilon$ nur noch auf der Menge

$$\Omega_\varepsilon := \Big\{ x \in \Omega;\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon \Big\}$$

wohldefiniert, weil $\operatorname{spt} \eta_\varepsilon(\cdot - x) \subset \overline{B}_\varepsilon(x)$ ist und $B_\varepsilon(x) \Subset \Omega$ nur für Punkte $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt. Die Menge Ω_ε bezeichnet man als *innere Parallelmenge* zu Ω im Abstand ε.

Definition 4.2 (Glättung/Regularisierung)**.**
Seien $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\eta \in C^\infty_\circ(\mathbb{R}^d)$ ein glättender Kern auf $\mathbb{R}^d$. Dann heißt die Faltung $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \eta_\varepsilon(z - x)\, u(z)\, dz = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x)\, u(z)\, dz,$$

die Glättung (oder Regularisierung) von u mit Radius $\varepsilon > 0$.

Anschaulich ist die Faltung u_ε der Mittelwert von u über die Kugel $B_\varepsilon(x)$ versehen mit der Gewichtsfunktion η_ε. Nach dem Prinzip der Differentiation von parameterabhängigen Integralen ist eine Faltung $u * v$ stets so regulär, wie es der „bessere“ Faktor erlaubt. Speziell hat die Glättung u_ε die folgende Eigenschaft:

Lemma 4.3 (Glättung)**.**
Für jede Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Ist ferner $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und besitzt u eine γ–te schwache Ableitung, so gilt:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon = \big(\partial^\gamma u\big)_\varepsilon \quad \textit{auf} \quad \Omega_\varepsilon.$$ [1]

Die Glättung — daher auch der Name — ist also eine auf Ω_ε glatte Funktion, und darf mit der schwachen Ableitung (sofern existent) vertauscht werden.

Beweis von Lemma 4.3.
Zunächst ist für jeden Multiindex $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(z)\, \partial_x^\gamma\big(\eta_\varepsilon(z - x)\big)\, dz = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u(z)\, \big(\partial^\gamma \eta_\varepsilon\big)(z - x)\, dz, \tag{2}$$

worin das Integral auf der rechten Seite wohldefiniert ist für alle $x \in \Omega_\varepsilon$. Dies zeigt $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Nehmen wir nun an, dass u eine γ–te schwache Ableitung besitzt. Dann ist nach Definition der schwachen Differenzierbarkeit

$$\int_\Omega u(z)\, \big(\partial^\gamma \eta_\varepsilon\big)(z - x)\, dz = (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega \partial^\gamma u\, \eta_\varepsilon(z - x)\, dz = (-1)^{|\gamma|} \big(\partial^\gamma u\big)_\varepsilon,$$

woraus die behauptete Identität mit (2) folgt. □

Da wir mit Hilfe von Glättungen zu Approximationssätzen für $W^{k,p}$–Funktionen gelangen wollen, müssen wir wissen, wie sich die entsprechenden Normen beim Glätten verhalten. Wie sich herausstellt werden Normen bei Glättungsprozessen erhalten. Genauer:

[1] Ist $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, so ist natürlich $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und die Vertauschungsregel gilt auf $\mathbb{R}^d$.

Satz 4.4 (Normerhaltung beim Glätten).
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\Omega \Subset \Omega$ *und für ein* $\varepsilon > 0$ *sei*

$$\Omega^\varepsilon := \Big\{ x \in \mathbb{R}^d;\ \mathrm{dist}(x, \Omega) < \varepsilon \Big\}$$

die äußere Parallelmenge zu Ω *im Abstand* ε*. Dann gelten die folgenden Aussagen für Funktionen* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*.*

i) Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ *mit* $p \in [1, \infty]$*, so ist auch* $u_\varepsilon \in L^p_{loc}(\Omega)$ *und*

$$\|u_\varepsilon\|_{p;\,\omega} \leq \|u\|_{p;\,\omega^\varepsilon},$$

falls $\varepsilon > 0$ *so klein ist, dass* $\omega^\varepsilon \Subset \Omega$ *ist.*

ii) Ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *mit* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $p \in [1, \infty]$*, so ist* $u_\varepsilon \in W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)$ *und es gilt:*

$$\|u_\varepsilon\|_{k,p;\,\Omega_\varepsilon} \leq \|u\|_{k,p;\,\Omega}.$$

iii) Ist $u \in C^k(\Omega)$ *mit* $k \in \mathbb{N}_0$*, so ist* $u_\varepsilon \in C^k(\Omega_\varepsilon)$ *und es gilt:*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^k(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u\|_{C^k(\Omega)}.$$

iv) Ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *für ein* $\alpha \in (0, 1]$*, so ist* $u_\varepsilon \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ *mit kontrollierter Hölder–Konstante, i. e.:*

$$[u_\varepsilon]_{\alpha;\,\Omega_\varepsilon} \leq [u]_{\alpha;\,\Omega}.$$

Beweis:

i) Sei $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Für $x \in \omega \Subset \Omega$ ist dann per Definition

$$\big|u_\varepsilon(x)\big| \leq \|u\|_{\infty;\,\omega^\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x)\, dz,$$

worin das Integral auf der rechten Seite nach dem Transformationssatz und wegen $\int_{B_1(0)} \eta\, dx = 1$ den Wert 1 hat. Daraus folgt $\|u_\varepsilon\|_{\infty;\,\Omega} \leq \|u\|_{\infty;\,\Omega^\varepsilon}$, also $u_\varepsilon \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ für genügend kleines ε.
Für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{1;\omega} &\leq \int_\omega \int_{\omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(z - x) \big|u(z)\big|\, dz\, dx \\ &= \int_{\omega^\varepsilon} \left(\int_{\omega \cap B_\varepsilon(z)} \eta_\varepsilon(z - x)\, dx \right) \big|u(z)\big|\, dz \leq \int_{\omega^\varepsilon} \big|u(z)\big|\, dz, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung für $p = 1$ folgt.
Sei schließlich $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$. Für ein fixiertes $x \in \Omega \Subset \Omega$ definieren wir über Ω ein Maß$\mu_x : \wp(\Omega) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_x(A) := \big(\mathcal{L}^d \llcorner \eta_\varepsilon(\cdot - x)\big)(A) = \int_A \eta_\varepsilon(z - x)\, dz,$$

d. h. μ_x ist das mit $\eta_\varepsilon(\cdot - x)$ gewichtete Lebesgue–Maß[2]. Damit wird unter Verwendung der Hölder–Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_{p;\omega} &= \int_\omega \left| \int_{\omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(z-x)\, u(z)\, dz \right|^p dx \\
&= \int_\omega \left| \int_{\omega^\varepsilon} u(z)\, d\mu_x(z) \right|^p \le \int_\omega \left(\int_{\omega^\varepsilon} |u|^p \, d\mu_x \right) \mu_x(\omega^\varepsilon)^{p-1}\, dx \\
&\le \int_\omega \left(\int_{\omega^\varepsilon} |u|^p \, \eta_\varepsilon(z-x)\, dz \right) dx,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\mu_\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = 1$ benutzt haben. Man braucht jetzt nur noch gem. dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, und erhält die Behauptung wie im Fall $p = 1$.

ii) Da die Glättung mit der schwachen Ableitung vertauscht werden kann, folgt dies aus i). (Ersetze dort Ω durch Ω_ε; es ist $\big(\Omega_\varepsilon\big)^\varepsilon = \Omega$.)

iii) Analog zu ii).

iv) Seien $x, y \in \Omega_\varepsilon$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\big|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)\big| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\, \eta_\varepsilon(z-x)\, dz - \int_{B_\varepsilon(y)} u(z)\, \eta_\varepsilon(z-y)\, dz \right| \\
&= \left| \int_{B_\varepsilon(0)} u(z+x)\, \eta_\varepsilon(z)\, dz - \int_{B_\varepsilon(0)} u(z+y)\, \eta_\varepsilon(z)\, dz \right| \\
&\le \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z) \big| u(z+x) - u(z+y) \big|\, dz \le M\, |x-y|^\alpha,
\end{aligned}$$

wobei $M \in [0, \infty)$ die Hölder–Konstante von u auf Ω bezeichnet. Daraus folgt die Behauptung. □

Der gerade bewiesene Satz besagt im wesentlichen, dass der lineare *Glättungsoperator* $G_\varepsilon : X(\Omega) \to X(\Omega_\varepsilon)$, $u \mapsto u_\varepsilon$, der einen Raum von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$ in den entsprechenden Raum von Funktionen $\Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ abbildet, für alle gängigen Räume $X = L^p, W^{k,p}, C^k, C^{k,\alpha}$ eine *schwache Kontraktion* ist, i. e.:

$$\big\|G_\varepsilon(u)\big\|_{X(\Omega_\varepsilon)} \le \|u\|_{X(\Omega)}.$$

Darüber hinaus ist $\operatorname{Bild} G_\varepsilon \subset X(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.
Zum Beweis von Approximationssätzen ist natürlich noch die Frage zu beantworten, ob $G_\varepsilon(u) = u_\varepsilon$ bei $\varepsilon \searrow 0$ auch in der Norm des Raums $X(\Omega_{\varepsilon_0})$ gegen $u|_{\Omega_{\varepsilon_0}}$ konvergiert, d. h.: Man fixiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und untersucht, ob $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u$ auf Ω_{ε_0} in der $X(\Omega_{\varepsilon_0})$–Norm strebt bzw. lokale Konvergenz auf kompakten Teilmengen vorliegt. Diese Frage ist positiv zu beantworten, abgesehen von dem Fall, dass sich die Norm aus L^∞–Normen zusammensetzt. Ist nämlich $X(\Omega) = L^\infty(\Omega)$, so strebt i. a. u_ε bei $\varepsilon \searrow 0$ nicht gleichmäßig auf Ω gegen u, da sonst u zwangsläufig stetig sein müsste. Entsprechendes

[2] Für $\eta_\varepsilon \equiv 1$ wäre $\mu_x = \mathcal{L}^d$.

gilt für die Räume $W^{k,\infty}$. Der folgende Satz beschreibt das Konvergenzverhalten des Glättungsoperators genauer.

Satz 4.5 (Konvergenz von Glättungen).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

i) Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit einem $1 \le p < \infty$, so gilt:

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega).$$

Ist $u \in L^p(\Omega)$ mit einem $1 \le p < \infty$, Ω beschränkt und bezeichnet $\bar{u}$ die Fortsetzung von u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } L^p(\Omega).$$

Ferner gilt für jedes $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^p_{loc}(\Omega)$:

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ punktweise f. ü. in } \Omega$$

nach Wahl eines Vertreters.

ii) Ist $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p < \infty$, so gilt:

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

Ferner gilt für jedes $p \in [1, \infty]$ und $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u \text{ punktweise f. ü. in } \Omega$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$ nach Wahl von Vertretern.

iii) Ist $u \in C^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u$$

lokal gleichmäßig auf Ω für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$.

iv) Ist $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0, 1]$, so bleiben die Hölder–Normen sämtlicher Ableitungen von u bis zur Ordnung k beschränkt, es liegt allerdings keine lokale Konvergenz in der $C^{k,\alpha}$–Norm vor.

Beweis:

iii) Wir zeigen die Aussage für ein $u \in C^0(\Omega)$ und überlassen dem Leser die einfachen Folgerungen für $u \in C^k(\Omega)$. Wir fixieren $\omega \Subset \omega_0 \Subset \Omega$. Dann ist $\omega^\varepsilon \subset \omega_0$ für alle $0 < \varepsilon \ll 1$ und wir erhalten für jedes $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \big|u_\varepsilon(x) - u(x)\big| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x)\big(u(z) - u(x)\big)\, dz \right| \\ &\le \sup_{\substack{y,z \in \overline{\omega_0} \\ |y-z| \le \varepsilon}} \big|u(y) - u(z)\big|, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z-x)\, dz = 1$ ist. Da u als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{\omega_0}$ gleichmäßig stetig ist, verschwindet die rechte Seite von (3) bei $\varepsilon \searrow 0$.

i) Seien $\omega \Subset \Omega$ und $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\omega_0 := \omega^{\varepsilon_0} \Subset \Omega$ ist. Dann wird für jedes $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $v \in C^0(\Omega_0)$

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon - u\|_{p;\,\omega} &\leq \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{p;\,\omega} + \|v_\varepsilon - v\|_{p;\,\omega} + \|u - v\|_{p;\,\omega} \\ &\leq \|u - v\|_{p;\,\omega_0} + \|v_\varepsilon - v\|_{p;\,\omega} + \|u - v\|_{p;\,\omega}\end{aligned}$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Da nun $C^0(\omega_0)$ dicht in $L^p(\omega_0)$ liegt für $p < \infty$ (vgl. Satz 3.2.1), gibt es zu vorgegebenem $\delta > 0$ ein $v \in C^0(\omega_0)$, so dass $\|u - v\|_{p;\,\omega_0} < \frac{\delta}{3}$ ausfällt. Dann ist aber auch $\|u - v\|_{p;\,\omega} < \frac{\delta}{3}$ und gem. iii) hat man auch $\|v_\varepsilon - v\|_{p;\,\omega_0} < \frac{\delta}{3}$ für alle $\varepsilon < \varepsilon_1$ mit einem $\varepsilon_1 > 0$. Für alle $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ folgt daher mit der obigen Ungleichungskette $\|u_\varepsilon - u\|_{p;\,\omega} < \delta$, was wegen der Beliebigkeit von δ die erste Behauptung liefert.
Die $L^p(\Omega)$–Konvergenz für beschränkt Ω von $\bar{u}_\varepsilon$ gegen u ergibt sich nun aus der Konvergenz

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} \bar{u} \text{ in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^d).$$

Zum Beweis der punktweisen Konvergenz, die auch im Falle $p = \infty$ gilt, benutzt man den *Satz über Lebesgue–Punkte* (auch bekannt als *Differentiationssatz von Lebesgue*): Ist $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, so gilt für Vertreter von u (die wieder mit u bezeichnet seien)

$$\lim_{r\searrow 0} \fint_{B_r(x)} \bigl|u(z) - u(x)\bigr|\, dz = 0 \quad \text{f. f. a. } x \in \Omega, \tag{4}$$

worin $\fint_A u\, dz := \bigl(\mathcal{L}^d(A)\bigr)^{-1} \int_A u\, dz$ den *Mittelwert* von u über der Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnet (vgl. etwa [AFP], Cor. 2.23, [GMS], Vol. I, § 3.1.1 sowie [HS], Lem. 18.4). Die Punkte $x \in \Omega$, für die (4) gilt, heißen die *Lebesgue–Punkte* von u. Die Menge aller Lebesgue–Punkte von u heißt die *Lebesgue–Menge* für u.[3]
Ist nun $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$, so wird für fast alle $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}\bigl|u_\varepsilon(x) - u(x)\bigr| &\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z - x) \bigl|u(z) - u(x)\bigr|\, dz \\ &\leq \|\eta\|_\infty\, \varepsilon^{-d} \int_{B_\varepsilon(x)} \bigl|u(z) - u(x)\bigr|\, dz \\ &\leq \mathcal{L}^d(B_1)\, \|\eta\|_\infty \fint_{B_\varepsilon(x)} \bigl|u(z) - u(x)\bigr|\, dz,\end{aligned}$$

worin die rechte Seite gem. (4) bei $\varepsilon \searrow 0$ verschwindet.

ii) ergibt sich aus i).

iv) Dies ergibt sich mit der Aussage iv) aus Satz 4.4. Wir überlassen die Details dem Leser. □

Die Glättungen u_ε haben zwar gute Konvergenz– und Approximationseigenschaften, jedoch nur auf kompakten Teilgebieten. Der folgende Satz zeigt, dass man Sobolev–Funktionen global durch glatte Funktionen approximieren kann. Diese Aussage ist in der Literatur als *Satz von Meyers und Serrin* bekannt.

[3] Da für eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\mathcal{L}^d$–f. a. $x \in \Omega$ Lebesgue–Punkte von u sind, hat die Lebesgue–Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ für u volles Maß, d. h. es ist $\mathcal{L}^d(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$.

Satz 4.6 (Globale Approximation von Sobolev–Funktionen).
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \le p < \infty$. *Dann gilt:*

i) Zu jedem $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *gibt es eine Folge* $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ *mit*

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

ii) $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *liegt dicht in* $W^{k,p}(\Omega)$, *d. h. zu jedem* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *gibt es eine Folge* $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *mit*

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).[4]$$

Bemerkung 4.7.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $1 \le p \le \infty$. *Dann ist allgemein*

$$C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \subsetneqq W^{k,p}(\Omega).$$

Es macht daher Sinn die Vervollständigung $H^{k,p}(\Omega)$ *von* $C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *in* $W^{k,p}(\Omega)$ *zu betrachten. Darunter versteht man folgenden abstrakten Begriff: Ist* $(X, \|\cdot\|)$ *ein linearer Raum, so sei* $\tilde{X}$ *die Menge aller Cauchy–Folgen von Elementen aus* X, *wobei man Cauchy–Folgen miteinander identifiziert, wenn deren Differenzfolge verschwindet (Bildung von äquivalenzklassen). Der Raum* X *wird dann eingebettet in* $\tilde{X}$, *indem man jedem* $x \in X$ *die (äquivalenzklasse) der konstanten Folge* $(x, x, x, \ldots)$ *zuordnet. In der üblichen Weise macht man* $\tilde{X}$ *zu einem linearen Raum, auf dem man durch die Vorschrift*

$$\big\|(x_n)\big\| := \lim_n \|x_n\| \tag{5}$$

eine Norm einführt (dieser Grenzwert existiert für alle Folgen $(x_n) \in \tilde{X}$, *weil dann* $\|x_n\|$ *eine Cauchy–Folge in* $\mathbb{R}$ *ist). Einfache überlegungen zeigen dann folgendes:*

i) X *liegt dicht in* $\tilde{X}$.

ii) $\tilde{X}$ *ist ein Banach–Raum bzgl. der Norm gem.* (5).

iii) Ist Y *ein Banach–Raum, in den* X *als dichte Teilmenge eingebettet werden kann, so ist bereits* Y *isometrisch isomorph zu* $\tilde{X}$.

Der (gem. iii) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) Banach–Raum $\tilde{X}$ *heißt die* Vervollständigung *des Raums* X. *(Vgl. dazu etwa [Yo], § I.10.)*
Nach Satz 4.6 ii) liegt $C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *dicht in* $W^{k,p}(\Omega)$, *und es folgt, dass die Vervollständigung* $H^{k,p}(\Omega)$ *von* $C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *isometrisch isomorph zu* $W^{k,p}(\Omega)$ *ist (Satz von Meyers und Serrin, kurz: „$H = W$“).*

---

[4] Beachte, dass eine C^∞–Funktion i. a. nicht zu $W^{k,p}$ gehört, sondern nur zu $W^{k,p}_{loc}$.

Beweis von Satz 4.6.

i) Sei (ω_m) eine kompakte Ausschöpfung von Ω (vgl. Bem. vor Satz 6.15), so dass $\omega_m \Subset \omega_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.[5] Zu jedem m wählen wir nun eine *Abschneidefunktion* $\eta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta_m \equiv 1$ in $\overline{\omega_m}$ und $\operatorname{spt} \eta_m \subset \omega_{m+1}$.[6] Nach dem zuvor gezeigten Satz 4.5 ii) gibt es eine Nullfolge $(\varepsilon_m) \subset (0, \infty)$ mit

$$\left\| u_{\varepsilon_m} - u \right\|_{k,p;\,\omega_m} \le \frac{1}{m} \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen nun

$$u_m := \begin{cases} \eta_m \, u_{\varepsilon_m} & \text{auf} \quad \omega_{m+1} \\ 0 & \text{auf} \quad \Omega \setminus \omega_{m+1} \end{cases}$$

und zeigen, dass diese Folge das Gewünschte leistet. Es ist $u_{\varepsilon_m} \in C^\infty\big(\omega_{\varepsilon_m}\big)$ und wenn ε_m genügend klein ist (gehe ggf. zu einer Teilfolge über, die wieder mit ε_m bezeichnet sei), ist auch $\Omega_{m+1} \Subset \Omega_{\varepsilon_m}$, so dass u_m eine C^∞–Funktion auf Ω mit Träger in $\overline{\omega}_{m+1}$ ist. Wir müssen also noch zeigen:

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}(\omega) \quad \text{für alle} \quad \omega \Subset \Omega.$$

Zu fixiertem $\omega \Subset \Omega$ gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\omega \Subset \omega_{m_0}$. Dann ist natürlich auch $\omega \Subset \omega_m$ für alle $m > m_0$ und es folgt:

$$\|u_m - u\|_{k,p;\,\omega} \le \|u_m - u\|_{k,p;\,\omega_m} = \left\| u_{\varepsilon_m} - u \right\|_{k,p;\,\omega_m} \le \frac{1}{m},$$

und damit die Behauptung.

ii) Sei (ω_m) wie in i). wir betrachten jetzt für $m \in \mathbb{N}_0$ die „Ringgebiete“

$$A_m := \omega_{m+1} \setminus \overline{\omega}_{m-1} \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \omega_{-1} := \emptyset.$$

Dann sind $A_0 = \omega_1$, $A_1 = \omega_2$ und die A_m sind offen und schöpfen Ω aus, d. h. es ist $\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} A_m$. Sei nun $(\eta_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ eine Zerlegung der Eins bzgl. (A_m), d. h. eine Folge (η_m) mit den Eigenschaften

$$0 \le \eta_k \le 1 \text{ in } \Omega \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N} \text{ gibt es ein } m_k \in \mathbb{N} \text{ mit } \operatorname{spt} \eta_k \Subset A_{m_k}. \tag{7}$$

$$\sharp\big\{k \in \mathbb{N};\ \operatorname{spt} \eta_k \cap \omega \neq \emptyset\big\} < \infty \text{ für alle } \omega \Subset \Omega. \tag{8}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k \equiv 1 \text{ in } \Omega. \tag{9}$$

Wobei o. E. annehmen, dass $\operatorname{spt} \eta_m \subset A_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt (sonst gehe über zu einer Teilfolge von (η_m)). Wir konstruieren nun zu vorgegebenem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ ein

$$v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|u - v\|_{k,p} < \varepsilon. \tag{10}$$

[5] Beispielsweise kann man $\omega_m := \big\{x \in \Omega \cap B_m(0);\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m}\big\}$ wählen, wobei man ggf. erst ab einem genügend großen m zu zählen beginnt, um $\omega_m \neq \emptyset$ zu garantieren. Dabei ist der Durchschnitt $\Omega \cap B_m(0)$ nur bei unbeschränkten Gebieten Ω für die relative Kompaktheit der ω_m nötig. Ist Ω beschränkt, so kann man einfach $\omega_m := \Omega_{1/m}$ wählen.

[6] Eine solche Abschneidefunktion erhält man etwa durch Glättung der charakteristischen Funktion $\mathbb{1}_{\tilde{\omega}_m}$ mit einem sehr kleinen Radius, wobei $\omega_m \Subset \tilde{\omega}_m \Subset \omega_{m+1}$ ist.

Wie eine einfache überlegung zeigt, ist $v_m := \eta_m\, u \in W^{k,p}(\Omega)$ und hat kompakten Träger in A_m. Daraus folgt, dass auch die Glättung $(v_m)_{\varepsilon_m}$ für genügend kleines ε_m kompakten Träger in A_m hat, also eine $C_0^\infty(\Omega)$–Funktion ist. Ferner gilt:

$$\big\|(v_m)_\delta - v_m\big\|_{k,p;\,\Omega} \xrightarrow{\delta\searrow 0} 0$$

nach Satz 4.5 (werte die Norm über einer einer offenen Menge ω mit $\operatorname{spt} v_m \subset \omega \Subset \Omega$ aus). Nach ggf. übergang zu einer Teilfolge von (ε_m) (welche wieder mit (ε_m) bezeichnet sei) gilt daher:

$$\big\|(v_m)_{\varepsilon_m} - v_m\big\|_{k,p;\,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \quad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Wir sehen nun, dass $v := \sum_{m=0}^{\infty} (v_m)_{\varepsilon_m}$ ein Kandidat für die gesuchte Funktion v ist: Bei vorgegebenem $\omega \Subset \Omega$ gibt es wegen der Eigenschaft (8) der Zerlegung (η_m) nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $\omega \cap \operatorname{spt}(v_m)_{\varepsilon_m} \neq \emptyset$, so dass speziell für jedes $x \in \Omega$ nur für endlich viele m $(v_m)_{\varepsilon_m} \neq 0$ ist. Damit ist v wohldefiniert und in $C^\infty(\Omega)$, da dies für jedes $(v_m)_{\varepsilon_m}$ der Fall ist. Bleibt (10) nachzuweisen.[7] Dazu benutzt man folgenden Trick: Sei $\omega \Subset \Omega$ fixiert. Dann ist aufgrund der Eigenschaft (9) von (η_m) und wegen (11)

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{k,p;\,\omega} &= \left\| \sum_{m=0}^{\infty} (v_m)_{\varepsilon_m} - v_m \right\|_{k,p;\,\omega} \le \sum_{m=0}^{\infty} \big\|(v_m)_{\varepsilon_m} - v_m\big\|_{k,p} \\ &< \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} = \varepsilon,\end{aligned}$$

so dass also für Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:

$$\sum_{|\gamma|\le k} \int_\omega \big|\partial^\gamma (u - v)\big|^p\, dx < \varepsilon^p.$$

Andererseits ist nach dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|\partial^\gamma(u-v)\big|^p\, dx &\le \liminf_m \int_\Omega \mathbb{1}_{\omega_m} \big|\partial^\gamma(u-v)\big|^p\, dx \\ &= \liminf_m \int_{\omega_m} \big|\partial^\gamma(u-v)\big|^p\, dx,\end{aligned}$$

und somit auch

$$\sum_{|\gamma|\le k} \int_\Omega \big|\partial^\gamma (u - v)\big|^p\, dx < \varepsilon^p,$$

was $u - v \in W^{k,p}(\Omega)$ bedeutet. Daraus folgt (10), wie gewünscht. □

Lemma 4.8.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in W^1(\Omega)$. Dann gilt: Ist $\Omega \subset \Omega$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend) und ist $\nabla u = 0$ f. ü. in Ω, so ist u f. ü. in Ω konstant.

[7] Beachte, dass $v \in C^\infty(\Omega)$ lediglich $v \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ impliziert.

Beweis: Seien $B \Subset \Omega$ eine Kugel und $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch $B^\varepsilon \Subset \Omega$ ist. Dann gilt für die Glättung $(\nabla u)_\varepsilon$ von ∇u nach Lemma 4.3:

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{B^\varepsilon} \eta_\varepsilon(z-x)\,\nabla u(z)\,dz = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in B,$$

so dass $u_\varepsilon \equiv c_\varepsilon$ in B mit einer Konstante $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ sein muss, denn u_ε ist ja gem. Lemma 4.3 eine auf B glatte Funktion. Andererseits strebt $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} u$ in $L^1(B)$ (Satz 4.5), so dass

$$\int_B |c_\varepsilon - u|\,dx \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} 0$$

strebt. Damit strebt aber offenbar auch

$$c_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} \fint_B u\,dz.$$

Beides zusammen ergibt:

$$\int_B \left| u - \fint_B u\,dz \right| dx \le \int_B |u - c_\varepsilon|\,dx + \mathcal{L}^d(B) \left| c_\varepsilon - \fint_B u\,dz \right| \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} 0,$$

und damit $u \equiv \fint_B u\,dz =: c_B \in \mathbb{R}$ auf B. Wir nehmen nun an, u sei nicht konstant auf Ω. Dann gibt es Kugeln $B_{1,2} \Subset \Omega$, so dass $c_{B_1} \neq c_{B_2}$ ist. Da Ω zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve γ, welche die Zentren der Kugeln B_1 und B_2 verbindet (z. B. einen geeigneten Streckenzug). Da Ω offen ist, kann man die Spur von γ mit sich überlappenden Kugeln $B_k \Subset \Omega$ überdecken. Sukzessive ergibt sich dann $c_{B_k} \equiv const$, im Widerspruch zur Annahme. (Sind nämlich B und B' sich überlappende Kugeln, welche kompakt in Ω enthalten sind, so muss nach dem oben Gezeigten $u \equiv c_B$ auf B sowie $u \equiv c_{B'}$ auf B' gelten. Auf $B \cap B' \neq \emptyset$ gilt daher $u \equiv c_B = c_{B'}$, also $c_B = c_{B'}$.) $\square$

Satz 4.9 (Produktregel, Kettenregel)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen (und beschränkt[8]), $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p, q, r \le \infty$. Dann gilt:

i) Sind $u \in W^{k,p}_{(loc)}(\Omega)$, $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ mit $p' := p/(p-1)$ bzw. $= \infty$ für $p = 1$, so ist $uv \in W^{k,1}_{(loc)}(\Omega)$ und es gilt fast überall die übliche Formel von Leibniz:

$$\partial^\gamma(uv) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}_0^d \\ \nu \le \gamma}} \binom{\gamma}{\nu} \partial^\nu u\, \partial^{\gamma-\nu} v \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \le k$.[9]

[8] Ist Ω unbeschränkt, so erhält man lediglich $uv \in W^{k,p}(\Omega)^D$ bzw. $\varphi \circ u \in W^{k,p}(\Omega)^D$ unabhänig davon, ob u bzw. v global den entsprechenden Räumen angehören.

[9] Zur Erinnerung: Für Multiindizes $\gamma, \nu \in \mathbb{N}_0^d$ bedeutet $\nu \le \gamma$, dass $\nu_m \le \gamma_m$ für alle $m \in \{1, \ldots, d\}$ ist. Entsprechend ist $\gamma - \nu$ komponentenweise erklärt. Es ist

$$\binom{\gamma}{\nu} := \frac{\gamma!}{\nu!\,(\gamma-\nu)!},$$

wobei $\nu! := \nu_1! \cdots \nu_d!$ ist.

ii) Seien $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ *mit* $\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *und* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$*. Dann ist* $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *und es gilt:*

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

und für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$*.*

Bemerkung 4.10.

i) Ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ *mit beschränkter Ableitung (wie in Satz 4.9), so ist* φ *insbesondere Lipschitz–stetig. Ist* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nur Lipschitz–stetig, so ist* φ *f. ü. klassisch differenzierbar* [10] *Eine Sobolev–Funktion* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *kann aber Teilmengen von* Ω *mit positivem Maß (d. h. Teilmengen, die keine Nullmengen sind) in Stellen abbilden, in denen* φ *nicht differenzierbar ist (man betrachte etwa* $u : B_1(0) \to \partial B_1(0)$*,* $x \mapsto \frac{x}{|x|}$*). Daher ist nicht klar, wie man* $\varphi'(u)$ *definieren soll, wenn* φ *lediglich Lipschitz–stetig ist.*

ii) Die Kettenregel aus Satz 4.9 lässt sich noch etwas verallgemeinern. Es lässt sich zeigen, dass sie ihre Gültigkeit behält, wenn man verlangt, dass φ *lediglich stückweise von der Klasse* C^1 *ist. Insbesondere liegen die Funktionen* $|u|, u_+, u_-, \max\{u, c\}$ *in* $W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *falls* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$*.*

iii) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *wie in Satz 4.9,* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d)^D$ *(*$D, N \in \mathbb{N}$*) mit beschränkter Ableitung* $D\varphi$ *(d. h.* $D\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times D})$*, also* φ *Lipschitz–stetig) und* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)^D$ *mit* $1 \le p \le \infty$*. Dann ist* $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)^N$ *mit*

$$\partial_\gamma(\varphi \circ u) = D\varphi(u)\,\partial_\gamma u \quad \textit{f. ü. in } \Omega \tag{12}$$

für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$*. Dies ergibt sich relativ leicht mit Hilfe von ii) aus Satz 4.9.*
Ist φ *nicht* C^1*, sondern lediglich Lipschitz–stetig, so ist zwar immer noch* $\varphi \circ u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)^D$*, aber die Formel (12) gilt nicht mehr f. ü. in* Ω *(vgl. i)). Immerhin kann man aber zeigen, dass dann*

$$\left|\partial_\gamma(\varphi \circ u)\right| \le \mathrm{Lip}(\varphi)\left|\partial_\gamma u\right| \quad \textit{f. ü. in } \Omega$$

für alle $\gamma \in \{1, \ldots, d\}$ *gilt, wobei* $\mathrm{Lip}(\varphi) \in [0, \infty)$ *die Lipschitz–Konstante von* φ *bezeichnet. Dies ist wesentlich aufwendiger zu beweisen und erfordert tiefergehende maßtheoretische Kenntnisse (es sei etwa auf [?], Lem. B.1 verwiesen; einen Beweis für den eindimensionalen Fall findet sich in [Mo].).*

iv) Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ *offen,* $\varphi : \Omega' \to \Omega$ *ein* C^k*–Diffeomorphismus*[11] *(*$k \in \mathbb{N}$*) und* $u \in W^{1,p}_{(loc)}(\Omega)$ *mit* $1 \le p \le \infty$*. Dann ist* $u \circ \varphi \in W^{k,p}_{loc}(\Omega')$ *und es gelten die entsprechenden Formeln für* $\partial^\gamma(u \circ \varphi)$ *für* $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\gamma| \le k$ *f. ü. auf* Ω'*. (Dabei ist zu beachten, dass die Verkettung* $u \circ \varphi$ *immer zur Klasse* $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *gehört, auch wenn* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *ist.) Weißman in dieser Situation, dass die Ableitungen* $D^l\varphi$ *(*$l \in \{1, \ldots, k\}$*) sowie* $|\det D\varphi|^{-1}$ *beschränkt sind, so gilt:*

$$\|u \circ \varphi\|_{k,p;\,\Omega'} \le c\,\|u\|_{k,p;\,\Omega}$$

mit einer Konstanten $c = c(n, k, p, \varphi) > 0$*.*

---

[10] Diese Aussage gilt allgemeiner auch für Lipschitz–stetige Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^N$ und ist in der Literatur als *Satz von Rademacher* bekannt (vgl. etwa [?], § 3.1.2).

[11] Zur Erinnerung: Eine Abbildung $\varphi : \Omega' \to \Omega$ heißt ein C^k*–Diffeomorphismus*, falls $\varphi \in C^k(\Omega', \Omega)$ bijektiv ist mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \in C^k(\Omega, \Omega')$.

Beweis von Satz 4.9.

i) Wir zeigen die Behauptung nur für $k = 1$ und überlassen dem Leser den Beweis für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Ferner nehmen wir an, dass Ω beschränkt ist (sonst gehe man zu $\omega \Subset \Omega$ über und behandle alles lokal). Seien zunächst $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ mit $p, p' < \infty$. Nach dem Satz von Meyers–Serrin (Satz 4.6 ii)) gibt es dann Folgen $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ und $(v_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p'}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \quad \text{und} \quad v_m \xrightarrow{m} v \text{ in } W^{1,p'}(\Omega).$$

Leicht sieht man die folgenden Konvergenzen:

$$\begin{aligned} u_m v_m &\xrightarrow{m} uv \text{ in } L^1(\Omega), \\ \partial_\gamma u_m\, v_m + u_m\, \partial_\gamma v_m &\xrightarrow{m} \partial_\gamma u\, v + u\, \partial_\gamma v \text{ in } L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{13}$$

Hiermit folgt die schwache Differenzierbarkeit von uv und die Formel für $\partial_\gamma(uv)$. Ist eine der Funktionen u oder v lokal von der Klasse $W^{1,p}$ bzw. $W^{1,p'}$ mit $p, p' < \infty$, so approximiere man u bzw. v (gem. Satz 4.6 i)) lokal in der entsprechenden Norm, und verfahre analog.

Bleibt der Fall $q = \infty$ bzw. $r = \infty$ zu behandeln: Sind etwa $u \in W^{1,\infty}_{(loc)}(\Omega)$ und $u \in W^{1,1}_{(loc)}(\Omega)$, so approximiert man lediglich v in $W^{1,1}_{(loc)}(\Omega)$ durch glatte Funktionen (v_m), mit dem eben Gezeigten ist dann $\partial_\gamma(uv_m) \in W^1(\Omega)$ mit der ensprechenden Formel und bei $m \to \infty$ folgt wie zuvor die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} uv_m &\xrightarrow{m} uv \text{ in } L^1(\Omega), \\ \partial_\gamma u\, v_m + u\, \partial_\gamma v_m &\xrightarrow{m} \partial_\gamma u\, v + u\, \partial_\gamma v \text{ in } L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{14}$$

ii) Seien zunächst $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p < \infty$ und φ Lipschitz–stetig mit Lipschitz–Konstante $L \in [0, \infty)$. Wieder nach Satz 4.6 ii) gibt es dann eine Folge $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \text{ und f. ü. in } \Omega,$$

und daher:

$$\int_\Omega \big|\varphi(u_m) - \varphi(u)\big|^p\, dx \le L^p \int_\Omega |u_m - u|^p\, dx \xrightarrow{m} 0.$$

Ferner ergibt sich für jedes $\gamma \in \{1, \dots, d\}$:

$$\int_\Omega \big|\varphi'(u_m)\, \partial_\gamma u_m - \varphi'(u)\, \partial_\gamma u\big|^p\, dx \le c \left\{ \int_\Omega \big|\varphi'(u_m) - \varphi'(u)\big|^p \big|\partial_\gamma u\big|^p\, dx \right.$$

$$\left. + \int_\Omega \big|\varphi'(u_m)\big|^p \big|\partial_\gamma u_m - \partial_\gamma u\big|^p\, dx \right\} =: c\big\{I_1 + I_2\big\}$$

mit einer Konstanten $c = c(p) > 0$.[12] Wegen der f. ü. punktweisen Konvergenz von (u_m) und der Stetigkeit von φ' strebt

$$\eta_m := \big|\varphi'(u_m) - \varphi'(u)\big|^p \big|\partial_\gamma u\big|^p \xrightarrow{m} 0.$$

[12] Allgemein gilt: $(a + b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ für alle $a, b \ge 0$ und $p \in [1, \infty)$ (siehe etwa [Ad], Lem. 2.24).

Da auerdem $0 \leq \eta_m \leq \left(2\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\varphi'(t)\right|\right)^p |\nabla u|^p =: \eta$ f. ü. in Ω gilt, ist (η_m) beschränkt durch $\eta \in L^1(\Omega)$, so dass mit dem Satz von Lebesgue (majorisierte Konvergenz) folgt:

$$I_1 = \int_\Omega \eta_m \, dx \xrightarrow{m} 0.$$

Für I_2 erhält man

$$I_2 \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\varphi'(t)\right|^p \|\partial_\gamma u_m - \partial_\gamma u\|_p^p \xrightarrow{m} 0,$$

womit die Behauptung im Fall $p < \infty$ bewiesen ist.
Den Fall $u \in W^{1,p}(\Omega)^D$ mit $p < \infty$ behandelt man analog wie unter i) beschrieben.
Bleibt der Fall $u \in W^{1,\infty}_{(loc)}(\Omega)$: Es ist dann $u \in W^{1,s}_{(loc)}(\Omega)$ für alle $s \in [1,\infty)$, nach dem gerade Gezeigten also $\varphi \circ u \in W^{1,s}_{(loc)}(\Omega)$ mit $\partial_\gamma(\varphi\circ u) = \varphi'(u)\,\partial_\gamma u$ f. ü. in Ω. Da aber $\varphi'(u)\,\partial_\gamma u$ sowie $\varphi \circ u$ zu $L^\infty_{(loc)}(\Omega)$ gehören, folgt $u \in W^{1,\infty}_{(loc)}(\Omega)$. $\square$

Satz 4.11 (Differenzenquotienten)**.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 < p < \infty$, $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \{1,\dots,d\}$. Dann sind äquivalent:

i) Die γ–te schwache Ableitung $\partial_\gamma u$ von u ist von der Klasse $L^p_{loc}(\Omega)$ (bzw. von der Klasse $L^p(\Omega)$).

ii) Für jedes $\omega \Subset \Omega$ gilt:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq c \quad \textit{für alle} \quad h \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \textit{ mit } |h| < \operatorname{dist}(\omega,\partial\Omega)$$

mit einer Konstante $c = c(\omega) > 0$ (bzw. mit einer von Ω unabhängigen Konstante $c > 0$).

In diesem Fall gilt die Abschätzung:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}},$$

für jedes $\omega \Subset \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\omega,\partial\Omega)$, und es strebt

$$\Delta^h_\gamma u \xrightarrow{h\searrow 0} \partial_\gamma u \textit{ in } L^p_{loc}(\Omega). \tag{15}$$

Bemerkung 4.12.
Ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, so gilt:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{k-1,p;\,\Omega_{|h|}} \leq \|\partial_\gamma u\|_{k,p;\,\Omega}.$$

Daraus ergibt sich insbesondere, dass in Satz 4.11 die Richtung i) $\Rightarrow$ ii) auch im Fall $p = 1$ richtig ist (nicht jedoch für $p = \infty$). Desweiteren gilt (15) *auch im Fall $p = 1$.*

Beweis von Satz 4.11.
Der Beweis erfolgt in drei Schritten. In einem ersten Schritt (1) beweisen wir zunächst die Hilfsaussage: Ist $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$, so gilt:

$$\|\Delta^h_\gamma u\|_{p;\,\omega} \leq \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}} \tag{16}$$

für alle $\gamma \in \{1,\dots,d\}$, $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\omega,\partial\Omega)$ und $\omega \Subset \Omega$.

(1) Seien $\omega \Subset \Omega$ und $x \in \omega$ fixiert. Dann ist nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\left|\Delta_\gamma^h u(x)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\, u(x + th\, e_\gamma)\, dt\right| \le \int_0^1 \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right| dt. \tag{17}$$

Für $1 < p < \infty$ ergibt daher die Hölder–Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega}^p &\le \int_\omega \left(\int_0^1 \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right| dt\right)^p dx \\
&\le \mathcal{L}^1(0,1)^{p-1} \int_\omega \int_0^1 \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right|^p dt\, dx \\
&= \int_0^1 \int_\omega \left|\partial_\gamma u(x + th\, e_\gamma)\right|^p dx\, dt \le \int_{\omega^{|h|}} \left|\partial_\gamma u(z)\right|^p dz,
\end{aligned}$$

was (16) in diesem Fall liefert. Für $p = 1$ bzw $p = \infty$ erhält man (16) unmittelbar aus (17).

(2) Sei nun $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Wir wollen (15) zeigen. Dazu betrachten wir eine Folge $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \quad \text{und} \quad \partial_\gamma u_m \xrightarrow{m} \partial_\gamma u \quad \text{in } L^p_{loc}(\Omega)$$

(eine solche Folge haben wir im Beweis von Satz 4.6 i) konstruiert, wobei die Annahme $p < \infty$ entscheidend ist). Da offenbar (16) für jedes u_m gilt, liefern diese Konvergenzen, dass (16) auch für u gelten muss:

$$\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le \|\partial_\gamma u\|_{p;\,\omega^{|h|}}.$$

Für $|h| \ll 1$ kann darin aber die rechte Seite unabhängig von h abgeschätzt werden, womit die Richtung *i)* $\Rightarrow$ *ii)* (sogar für $p = 1$) bewiesen ist. Nun aber zum Beweis von (15): Sei $\omega \Subset \Omega$ fixiert und sei $0 < r \le \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$, so dass also $\omega^r \Subset \Omega$ ist. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $m_0 = m_0(\varepsilon)$, so dass gilt:

$$\|\partial_\gamma u - \partial_\gamma u_m\|_{p;\,\omega^r} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad m > m_0.$$

Andererseits strebt offenbar $\Delta_\gamma^h u_m \xrightarrow{h \searrow 0} \partial_\gamma u_m$ gleichmäig auf ω,[13], so dass zu $\varepsilon > 0$ ein $h_0 = h_0(\varepsilon) < r$ existiert mit

$$\|\partial_\gamma u_m - \Delta_\gamma^h u_m\|_{p;\,\omega} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad |h| < h_0.$$

Schlielich ist wegen (16)

$$\|\Delta_\gamma^h u_m - \Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le \|\partial_\gamma u - \partial_\gamma u_m\|_{p;\,\omega^r} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad m > m_0.$$

[13] Allgemein gilt bekanntlich: Ist $w \in C^1(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen), so strebt

$$\Delta_\gamma^h w \xrightarrow{h \searrow 0} \partial_\gamma w$$

lokal gleichmäig auf Ω.

Zusammmen ergibt sich für alle $m > m_0$ und $|h| < h_0$ also

$$\begin{aligned}\|\partial_\gamma u - \Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le \|\partial_\gamma u - \partial_\gamma u_m\|_{p;\,\omega^r} + \|\partial_\gamma u_m - \Delta_\gamma^h u_m\|_{p;\,\omega} \\ + \|\Delta_\gamma^h u_m - \Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} < \varepsilon,\end{aligned}$$

womit (15) (auch im Fall $p = 1$) bewiesen ist.

(3) Wir zeigen *ii)* $\Rightarrow$ *i)*: Sei $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit

$$\|\Delta_\gamma^h u\|_{p;\,\omega} \le c \quad \text{für alle} \quad \omega \Subset \Omega,\ |h| < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$$

mit einer Konstanten $c = c(\omega) > 0$. Die Familie $(\Delta_\gamma^h u)$ ist also beschränkt in $L^p(\omega)$, so dass es wegen $1 < p < \infty$ eine Nullfolge (h_ν) und eine Funktion $v_\omega \in L^p(\omega)$ gibt mit

$$\Delta_\gamma^{h_\nu} u \xrightharpoonup{\nu} v \text{ in } L^p(\omega)$$

(schwache Kompaktheit von L^p). Sei nun (ω_l) eine kompakte Ausschöpfung von Ω, so dass $\omega_1 = \omega$ ist. Es ist dann

$$\|\Delta_\gamma^{h_\nu} u\|_{p;\,\omega_2} \le c(\omega_2),$$

so dass es eine Teilfolge von (h_ν^1) sowie eine Funktion $v_{\omega_2} \in L^p(\omega_2)$ gibt mit

$$\Delta_\gamma^{h_\nu^1} u \xrightharpoonup{\nu} v_{\omega_2} \text{ in } L^p(\omega_2).$$

Wegen der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes gilt daher $v_{\omega_2}|_\omega = v_\omega$. Durch fortgesetzte Teilfolgenwahl ergibt sich mit dem Diagonalverfahren die Existenz einer Nullfolge (h'_ν) und einer Funktion $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit

$$\Delta_\gamma^{h'_\nu} u \xrightharpoonup{\nu} v \text{ in } L^p_{loc}(\Omega).$$

Bleibt nachzuweisen, dass $v = \partial_\gamma u$ ist. Sei dazu $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Mit der partiellen Integrationsregel für Differenzenquotienten und der eben gezeigten Konvergenz folgt:

$$\int_\Omega v\,\eta\,dx = \lim_\nu \int_\Omega \Delta_\gamma^{h'_\nu} u\,\eta\,dx = -\lim_\nu \int_\Omega v\,\Delta_\gamma^{-h'_\nu}\eta\,dx = -\int_\Omega \partial_\gamma\eta\,u\,dx,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\Delta_\gamma^{-h'_\nu}\eta \xrightarrow{\nu} \partial_\gamma\eta$ gleichmäig auf Ω strebt. $\square$

Kapitel 5

Einbettungssätze

Unter einer Einbettung versteht man eine Abbildung $j : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit $X \subset Y$ und $j(x) = x \in Y$. Uns interessieren Einbettungen zwischen Sobolev- und Lebesgue-Räumen, die stetig oder kompakt sind:

- Eine Einbettung heit stetig, falls $\|j(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt;
- Eine Einbettung heit kompakt, falls beschränkte Folgen (x_n) vermöge j auf kompakte Folgen abgebildet werden (d.h. $(j(x_n))$ hat eine in Y konvergente Teilfolge, falls (x_n) in X beschränkt ist).

Folgender Einbettungssatz ist für die Regularitätstheorie von enormer Bedeutug und stellt ein zentrals Ergebnis der Vorlesung dar.

Satz 5.1 (Sobolev). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann sind die Einbettungen*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d,\ \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

stetig, d. h. für $c(d,p) > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{dp}{d-p}} &\leq c(d,p)\, \|\nabla u\|_p & ; \quad p < d \\ \sup_{\Omega} |u| &\leq c(d,p)\, \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_p & ; \quad p > d \end{aligned}$$

für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$.

Korollar 5.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt*

$$\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq m \leq k - \frac{d}{p},\ \mathcal{L}^d(\Omega) < \infty \end{cases}$$

(beachte: im zweiten Fall muss gelten $k - \frac{d}{p} > 0 \ \Rightarrow\ kp > n$).

Bemerkung 5.3. *a) Sei $p < d$. Dann heißt*

$$s(p) := \frac{dp}{d-p}$$

mit $s(p) > p$ der Sobolev-Exponent *zu p. Z.B. $d = 3$, $p = 2$, $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ergibt $u \in L^6(\Omega)$; $d = 2$, $p > 2$, $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ergibt $u \in C^0(\overline{\Omega})$.*

b) Ist $u \in \mathring{W}^{1,d}(\Omega)$, Ω beschränkt, so natürlich auch in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ für alle $p < d$, d.h.

$$\mathring{W}^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow \bigcap_{q<\infty} L^q(\Omega),$$

(tatsächlich gilt etwas mehr, aber nicht $\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, vgl.[Alt]).

c) Der Beweis von Korollar 5.2 folgt durch Iteration von Satz 5.1

Beweis von Satz 5.1.
(1) Sei $p = 1$. Wir betrachten zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Sei zunächst $d = 2$, dann gilt

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2)\, dt = \int_{-\infty}^{x_2} \partial_2 u(x_1, t)\, dt.$$

Es folgt

$$u^2(x) \le \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2)|\, dt\right)}_{=:\alpha(x_2)} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t)|\, dt\right)}_{=:\beta(x_1)}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(x_2)\beta(x_1)\, dx &= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \int_{x_2\in\mathbb{R}} \alpha(x_2)\beta(x_1)\, dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1\in\mathbb{R}} \beta(x_1)\, dx_1 \int_{x_2\in\mathbb{R}} \alpha(x_2)\, dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u|\, dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u|\, dx.\end{aligned}$$

Für die L^2-Norm erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\le \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u|\, dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u|\, dx} \\ &\le \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\partial_2 u| + |\partial_1 u|)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Das Vorgehen für $d \ge 3$ erfolgt analog, wir geben eine kurze Skizze: Für alle $i \in \{1, ..., d\}$ ist

$$u(x) = u(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_d) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_d)\, dt$$

und damit

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_d)| \, dt;$$

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} = [|u(x)| \cdot ... \cdot |u(x)|]^{\frac{1}{d-1}}$$

$$\leq \left[\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(...)| \, dt \right]^{\frac{1}{d-1}}.$$

Schlielich erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\prod_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(...)| \, dt \right]^{\frac{1}{d-1}} dx.$$

Iteratives Anwenden der Young-Ungleichung mit $d-1$ und $\frac{d-1}{d-2}$,... ergibt schlielich

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)} \leq \frac{1}{d} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Sei $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, dann existiert eine Folge $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - u_m\|_{W^{1,1}} \to 0$. Aus (1) folgt, dass (u_m) eine Cauchy-Folge ist in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ mit Limes $\tilde{u} \in L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Wegen $u_m \to u$ in $L^1(\Omega)$ gilt $\tilde{u} = u$, d.h. $u \in L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$. Mit $m \to \infty$ erhalten wir also (1) für alle $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$.
(2) Sei $p \in (1, d)$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Für $\gamma > 1$ definieren wir $v := |u|^\gamma$, es folgt $v \in C_0^1(\Omega)$ und (1) gilt für v, also

$$\left(\int_\Omega |u|^{\gamma \frac{d}{d-1}} \, dx \right)^{1-\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d} \int_\Omega \gamma |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \, dx.$$

Setzen wir $\gamma := \frac{(d-1)p}{d-p} \in (1, \infty)$, so erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}} \, dx \right)^{1-\frac{1}{d}} &\leq \frac{\gamma}{d} \int_\Omega |u|^{\gamma-1} |\nabla u| \, dx \\ &\leq \frac{\gamma}{d} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{p}{p-1}(\gamma-1)} \, dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\gamma}{d} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}} \, dx \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Wir können jetzt annehmen, dass u nicht identisch Null ist (dieser Fall ist trivial), so dass $\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}(\gamma-1)} \, dx > 0$ und daher ist

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{dp}{d-p}} \, dx \right)^{1-\frac{1}{d}-1-\frac{1}{p}} \leq \frac{\gamma}{d} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Offenbar ist $\frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{d-p}{dp}$, also

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \leq \frac{1}{d} \frac{(d-1)p}{d-p} \|\nabla u\|_p \tag{2}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Zu $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ wähle man $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist (u_m) Cauchy-Folge in $L^{\frac{dp}{d-p}}$, d.h. $u_m \to \tilde{u}$ in $L^{\frac{dp}{d-p}}$. Wie zuvor muss $\tilde{u} = u$ gelten, weswegen wir für $m \to$ (2) für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ erhalten.
(3) Sei $p \in (d, \infty)$. Zusätzlich ist hier $\mathcal{L}^d(\Omega) < \infty$ vorausgesetzt. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{L}^d(\Omega) = 1$, falls nicht transormieren wir:

$$\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{u}(x) = u\left(\mathcal{L}^d(\Omega)^{\frac{1}{d}} x\right),$$
$$\tilde{\Omega} := \left\{\mathcal{L}^d(\Omega)^{-\frac{1}{d}} x,\ x \in \Omega\right\}.$$

Wir zeigen nun

$$\sup_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}| \leq c(d,p) \|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\tilde{\Omega})}, \tag{3}$$

Rücktransformation ergibt dann

$$\sup_{\Omega} |u| \leq c(d,p) \mathcal{L}^d(\Omega)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4}$$

Zunächst sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$, wir definieren $v := d\frac{|u|}{\|\nabla u\|_p}$ (ohne Einschränkung sei u nicht konstant, dieser Fall ist trivial). Ist $\gamma > 1$, so ist $v^\gamma \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$, also gilt (1), d.h. mit $d' := \frac{d}{d-1}$

$$\|v^\gamma\|_{d'} \leq \frac{1}{d}\|\nabla v^\gamma\|_1 = \frac{\gamma}{d}\|v^{\gamma-1}\nabla v\|_1 \leq \frac{\gamma}{d}\|\nabla v\|_p \|v^{\gamma-1}\|_{p'},$$

wobei wir im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung benutzt haben. Beachtet man jetzt $|\nabla v| \leq d|\nabla u|\|\nabla u\|_p^{-1}$, so folgt $\|\nabla v\|_p \leq d$ und damit

$$\|v^\gamma\|_{d'} \leq \gamma \|v^{\gamma-1}\|_{p'}.$$

Schlielich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|v\|_{\gamma d'} = \|v^{\frac{1}{\gamma}}\|_{d'}^{\frac{1}{\gamma}} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v^{\gamma-1}\|_{p'}^{\frac{1}{\gamma}} &= \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int |v|^{(\gamma-1)p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}\frac{1}{\gamma}} \\
&= \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int |v|^{(\gamma-1)p'}\, dx\right)^{\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{p'}\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{p'(\gamma-1)}^{1-\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Können wir zeigen, dass

$$\|v\|_{p'(\gamma-1)} \leq \|v\|_{p'\gamma} \tag{6}$$

gilt, so erhalten wir

$$\|v\|_{\gamma d'} \leq \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v\|_{p'\gamma}^{1-\frac{1}{\gamma}}. \tag{7}$$

Kommen wir zum Beweis von (6): es ist wegen $\mathcal{L}^d(\Omega) = 1$ nach Hölder

$$\left[\int_\Omega |v|^{p'(\gamma-1)}\, dx\right]^{\frac{1}{p'(\gamma-1)}} \leq \left[\left(\int_\Omega |v|^{p'\gamma}\, dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{p'(\gamma-1)}} = \|v\|_{p'\gamma}.$$

Man beachte, dass in (7) höhere Potenzen durch niedrigere abgeschätzt werden (beachte $d' > p'$), dies wollen wir iterieren: mit $\delta := \frac{d'}{p'} > 1$ und $\gamma := \delta^\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$ folgt aus (7)

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|v\|_{p'\delta^\nu}^{1-\delta^{-\nu}} = \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \|v\|_{d'\delta^{\nu-1}}^{1-\delta^{-\nu}}.$$

(7) mit $\gamma = \delta^{\nu-1}$ ergibt

$$\|v\|_{d'\delta^{\nu-1}} \le \delta^{(\nu-1)\delta^{1-\nu}} \|v\|_{d'\delta^{\nu-2}}^{1-\delta^{1-\nu}}$$

und damit

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{(\nu-1)\delta^{\nu-1}+(\nu-1)\delta^{-(\nu-1)}} \|v\|_{d'\delta^{\nu-2}}^{\cdots}.$$

Induktiv erhalten wir

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{\sum_{k=1}^{\nu} k\delta^{-k}} \|v\|_{d'}^{\cdots} \tag{8}$$

und wegen $\|v\|_{d'} = \|v\|_{\frac{d}{d-1}} \le \frac{1}{d}\|\nabla v\|_1 \le \frac{1}{d}\|\nabla v\|_p \le 1$ folgt

$$\|v\|_{\delta^\nu d'} \le \delta^{\sum_{k=1}^{\infty} k\delta^{-k}} = c(d,p).$$

Man beachte, dass obige Summe wegen $\delta > 1$ konvergiert. Lassen wir auf der linken Seite $\nu \to \infty$ laufen, sehen wir

$$\|v\|_\infty \le c(d,p).$$

Die Definition von v liefert hieraus

$$\|u\|_\infty \le c(d,p)\|\nabla u\|_p \tag{9}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ist $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, so wählt man $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann ist (u_m) Cauchy-Folge in L^∞, d.h. $u_m \to \tilde{u}$ in L^∞. Es folgt $u \in C^0(\overline{\Omega})$ (als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen, $\tilde{u}$ ist Vertreter von u) und (9) für alle $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Es gibt Versionen des Einbettungssatzes für die Räume $W^{k,p}(\Omega)$, falls $\partial\Omega$ genügens glatt ist. Auf einen Beweis wird hier verzichtet, wir verweisen etwa auf [Alt].

Satz 5.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann sind die Einbettungen*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega) & ; \quad p < d \\ C^0(\overline{\Omega}) & ; \quad p > d \end{cases}$$

stetig, d. h. für $c(d,p,\Omega) > 0$ gilt

$$\|u\|_{\frac{dp}{d-p}} \le c(d,p,\Omega)\, \|u\|_{1,p} \quad ; \quad p < d$$

$$\sup_\Omega |u| \le c(d,p,\Omega)\, \|u\|_{1,p} \quad ; \quad p > d$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Korollar 5.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{\frac{dp}{d-kp}}(\Omega) & ; \quad kp < d \\ C^m(\overline{\Omega}) & ; \quad m \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le m \le k - \frac{d}{p},\ kp > d \end{cases}$$

Bemerkung 5.6. *a) Die Einbettungen im Fall $p > d$ können noch verschärft werden (Satz von Morrey, vgl. etwa [GT] Kapitel 7): Die Räume $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ (im zweiten Fall Ω beschränkt mit Lipschitz-Rand) sind stetig eingebettet in $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit $\gamma = 1 - \frac{d}{p}$. Die Räume $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ sind stetig eingebettet in $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit $\gamma = k - \frac{d}{p} - m$, falls $0 \le m < k - \frac{d}{p} < m+1$.*

b) Für $p = d$ gilt nicht $\mathring{W}^{1,d}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, die Aussage $\mathring{W}^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow \bigcap_{q<\infty} L^q(\Omega)$ lässt sich jedoch noch verbessern, es gilt

$$u \in \mathring{W}^{1,d}(\Omega) \;\Rightarrow\; \int_\Omega \exp\{const|u - (u)_\Omega|\}\, dx < \infty$$

wobei $(u)_\Omega$ der Mittelwert von u über Ω ist (Trudinger-Ungleichung, vgl. [GT]).

Wir kommen jetzt zu kompakten Einbettungen

Definition 5.7. *Seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetig linearer Operator. T heit kompakt, falls für jede in X beschränkte Folge (x_n) die Folge (Tx_n) eine (in Y) konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 5.8 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann ist die Einbettung*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega) \quad \text{für alle } t < \frac{pd}{d-p}$$

für $p < d$ kompakt.

Bemerkung 5.9. *a) Man beachte, dass die obere Grenze der Exponenten, für die man kompakte Einbettungen bekommt, gerade der Sobolev-Exponent ist.*

b) Iterativ erhält man die Kompaktheit der Einbettung $\mathring{W}^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ für alle $t < \frac{dp}{d-kp}$.

c) Die Räume $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ sind kompakt eingebettet in $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ für alle $\beta < \gamma = k - \frac{d}{p} - m$, falls $0 \le m < k - \frac{d}{p} < m+1$ (vg. [GT] Kapitel 7).

d) Wie in Satz 5.4 gelten auch hier analoge Aussagen für die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ mit Lipschitz-Rand im Fall einer beschränkten Menge Ω.

Bevor wir zum Beweis von Satz 5.8 kommen, benötigen wir noch folgendes

Lemma 5.10. *Sei $(f_k) \subset L^p(X,\mu)$ mit $1 \le p < \infty$ und es gelte $f_k \to f$ μ-f.ü. sowie*

$$\sup_k \int_E |f_k|^p\, d\mu \to 0, \quad \text{wenn } \mu(E) \to 0,$$

und zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine μ-messbare Teilmenge E_ε mit $\mu(E_\varepsilon) < \infty$ und

$$\sup_k \int_{X - E_\varepsilon} |f_k|^p\, d\mu \le \varepsilon.$$

Dann gilt $f \in L^p(X,\mu)$ und $f_k \to f$ in $L^p(X,\mu)$.

Bemerkung 5.11. *Obiges Lemma ist als Konvergenz-Satz von Vitali bekannt und es gilt auch die Rückrichtung, d.h. aus $f_k \to f$ in $L^p(X,\mu)$ (sowie μ-f.ü.) folgen die beiden Integralkriterien (vgl. [Alt], 1.19).*

Beweis: Es gilt $f_k \to f$ μ-f.ü. auf E_ε. Nach dem satz von Egorov (vgl. [Alt] 1.17) existiert eine Teilmenge $A_\varepsilon \subset E_\varepsilon$ mit $f_k \to f$ gleichmäig auf A_ε und $\mu(E_\varepsilon - A_\varepsilon) \le \varepsilon$. Es folgt

$$\int_X |f_k - f_l|^p \, d\mu = \int_{A_\varepsilon} |f_k - f_l|^p \, d\mu + \int_{X-A_\varepsilon} |f_k - f_l|^p \, d\mu$$
$$\le \mu(A_\varepsilon) \sup_{A_\varepsilon} |f_k - f_l|^p + c\left\{ \sup_m \int_{X-E_\varepsilon} |f_m|^p \, d\mu + \sup_m \int_{A_\varepsilon - E_\varepsilon} |f_m|^p \, d\mu \right\}.$$

Für $\varepsilon \to 0$ verschwinde der letzte Term, während der mittlere nach Voraussetzung $\le \varepsilon$ ist und demnach auch verschwindet. Wegen der gleichmäigen Konvergenz auf A_ε folgt, dass (f_k) Cauchy-Folge in $L^p(X,\mu)$ ist und daher konvergiert (man überlegt sich leicht, dass beide Limiten gleich sein müssen, vgl. GdV A 15). □

Beweis: Wir zeigen zunächst die kompakte Einbettung

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{10}$$

Der Rest folgt danach relativ leicht mit Lemma 5.10. Sei u_k in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ beschränkt. Für $p > 1$ erhalten wir nach übergang zu einer Teilfolge direkt $u_k \rightharpoonup: u$ in $L^p(\Omega)$. Für $p = 1$ folgt mit dem Satz von Sobolev die Beschränktheit von u_k in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ und (nach TFW) $u_k \rightharpoonup u$ in $L^{\frac{d}{d-1}}(\Omega)$ und damit auch in $L^1(\Omega)$ (Ω ist beschränkt). Wir setzen u_k und u auf $\mathbb{R}^d - \Omega$ durch 0 fort. Dann ist $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit Träger in $\overline{\Omega}$. Die Glättung $(u_k)_\varepsilon$ gehört dann zur Klasse $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$(u_k)_\varepsilon \overset{k\to\infty}{\to} u_\varepsilon \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d). \tag{11}$$

Zum Beweis betrachte man für fixiertes $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ die Funktionale $\Psi_\varepsilon^x \in L^p(\Omega)^*$ definiert durch

$$\Psi_\varepsilon^x(v) := \int_\Omega v(y)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Konvergiert $x_k \to x$ für $k \to \infty$, so konvergieren $\eta_\varepsilon(x_k - \cdot) \to \eta_\varepsilon(x - \cdot)$ gleichmäig auf $\mathbb{R}^d$, also $\Psi_\varepsilon^{x_k} \to \Psi_\varepsilon^x$ in $L^p(\Omega)^*$. Es folgt

$$(u_k)_\varepsilon(x_k) = \int_{B_\varepsilon(x_k)} \eta_\varepsilon(z - x_k)u_k(z)\, dz = \Psi_\varepsilon^{x_k}(u_k) \to \Psi_\varepsilon^x(u).$$

Damit folgt sogar $(u_k)_\varepsilon \to u_\varepsilon$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}^d$, also insbesondere (11), da $(u_k)_\varepsilon$ und u_ε auerhalb von kompakten Mengen 0 sind. Eine weitere Hilfsaussage, die wir benötigen ist

$$\|v - v_\varepsilon\|_p \le \varepsilon \|\nabla v\|_p \text{ für alle } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d). \tag{12}$$

Man beachte, dass linke und rechte Seite dieser Ungleichung stetig von v abhängen. Können wir also obige Ungleichung für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zeigen, so folgt der Rest durch

Approximation (vgl. Kapitel 1). Es ist

$$
\begin{aligned}
(v_\varepsilon - v)(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(z-x)(v(z)-v(x))\,dz = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)(v(z+x)-v(x))\,dz \\
&= \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z) \left(\int_0^1 \nabla v(x+sz)\cdot z\,ds \right) dz.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten

$$
|(v-v_\varepsilon)(x)| \le \varepsilon \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z) \left(\int_0^1 |\nabla v(x+sz)|\,ds \right) dz.
$$

Definieren wir $F(x,z) := (...)$, so folgt im Fall $p > 1$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)|F(x,z)|\,dz \right)^p dx \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p'}}(z)\eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(z)F(x,z)\,dz \right)^p dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z)\,dz \right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z)|F(x,z)|^p\,dz \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,z)|^p\,dx \right) dz \\
&\le \sup_{z\in B_\varepsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^d} |F(x,z)|^p\,dx.
\end{aligned}
$$

Im Fall $p = 1$ erhält man obige Ungleichung direkt ohne Anwendung der Hölder-Ungleichung. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|v-v_\varepsilon\|_p^p &\le \varepsilon^p \sup_{z\in B_\varepsilon(0)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla v(x+sz)|^p\,dsdx \\
&= \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla v(x+sz^*)|^p\,dsdx = \varepsilon^p \|\nabla v\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Mit (11) und (12) ergibt sich leicht (10):

$$
\begin{aligned}
\|u-u_k\|_p &\le \|u-u_\varepsilon\|_p + \|u_\varepsilon - (u_k)_\varepsilon\|_p + \|(u_k)_\varepsilon - u_k\|_p \\
&\le \|u-u_\varepsilon\|_p + \|u_\varepsilon - (u_k)_\varepsilon\|_p + \varepsilon\|\nabla u_k\|_p.
\end{aligned}
$$

und die Beschränktheit von ∇u_k in $L^p(\Omega)$ liefert

$$
\lim_{k\to\infty} \|u-u_k\|_p \le c\varepsilon + \|u-u_\varepsilon\|_p,
$$

was wegen der Beliebigkeit von ε (10) impliziert (beachte Satz 1.5).
Sei jetzt $(u_k) \subset \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ beschränkt: wir wissen nach Teilfolgenwahl $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ sowie punktweise f.ü. Mit Satz 5.1 ist u_k in $L^{s(p)}(\Omega)$ beschränkt. Für $t < s(p)$ folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung (Exponenten $\frac{s(p)}{t}$ und $\frac{s(p)}{s(p)-t}$)

$$
\sup_k \int_E |u_k|^t\,dx \le \sup_k \|u_k\|_{s(p)}^t \mathcal{L}^d(E)^{\frac{s(p)-t}{s(p)}} \overset{\mathcal{L}^d(E)\to 0}{\longrightarrow} 0.
$$

Zu $\delta > 0$ existiert eine messbare Menge $E_\delta \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^d(\Omega - E_\varepsilon) \le \delta$ (z.B. eine innere Parallelmenge) und

$$\sup_k \int_{\Omega - E_\delta} |u_k|^t \, dx \le \sup_k \|u_k\|_{s(p)}^t \mathcal{L}^d(\Omega - E_\delta)^{\frac{s(p)-t}{s(p)}} \le \varepsilon$$

bei passender Wahl von δ. Lemma 5.10 ergibt $u_k \to u$ in $L^t(\Omega)$. $\square$

Der folgende Satz zeigt unter anderem wie man Kompakheit für Räume Hölder-stetiger Funktionen erhält (und als Spezialfall Räume Lipschitz-stetiger Funktionen). Zunächst beachte man noch den Zusammenhang zwischen $\mathrm{Lip}(\Omega)$ und $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Lemma 5.12. *a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und konvex, so gilt $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathrm{Lip}(\Omega)$, wobei*

$$\mathrm{Lip}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \ \mathrm{Lip}(u) := \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} < \infty \right\}.$$

Insbesondere gilt $\|\nabla u\|_\infty = \mathrm{Lip}(u)$.

b) Für nichtkonvexe beschränkte Gebiete gilt $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega) = \mathrm{Lip}_{loc}(\Omega)$.

Satz 5.13 (Arzelà–Ascoli)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und sei $(u_m) \subset C^0(\overline{\Omega})$ und habe die Eigenschaften:

i) (Beschränktheit)

$$\sup_m \|u_m\|_\infty < \infty$$

ii) (Gleichgradige Stetigkeit)

$$\sup_m \big|u_m(x) - u_m(y)\big| \xrightarrow{m} 0$$

für alle $x, y \in \overline{\Omega}$ mit $|x - y| \to 0$.

Dann gibt es eine Teilfolge $\big(u_{m_k}\big)$ von (u_m) sowie eine Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$, so dass gilt:

$$u_{m_k} \xrightarrow{k} u \text{ gleichmäig in } \overline{\Omega}.$$

Die *gleichgradige Stetigkeit* ii) in Satz 5.13 ist insbesondere dann gewährleistet, wenn $(u_m) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit einem $\alpha \in (0,1]$ ist und die Hölder–Konstante gleichmäßig beschränkt ist: $\sup_m [u_m]_\alpha < \infty$. Ferner kann man dann i) aus Satz 5.13 abschwächen zu

$$\sup_m \big|u_m(x)\big| < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{\Omega},$$

braucht also keine gleichmäßige Beschränktheit bzgl. $\overline{\Omega}$. Man beachte, dass gleichmäßige Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit sogar äquivalent zur Existenz einer konvergenten Teilfolge sind (vgl. [Alt], S. 87). Eine beschränkte Folge in $W^{1,\infty}(\Omega)$ hat also eine Teilfolge, die gleichmäig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Man überlegt sich leicht, dass auch die Lipschitz-Stetigkeit erhalten bleibt, d.h. also der Limes gehört wieder zum Raum $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Beweis: Da $\mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$ liegt ist Ω seperabel, d.h. wir finden eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ von Ω. Wegen (i) ist $(f_m(x_1))$ beschränkt in $\mathbb{R}$, so dass wir eine konvergente Teilfolge $(f'_m(x_1))$ wählen können. Analog ist $(f'_m(x_2))$ beschränkt und wir finden eine konvergente Teilfolge $(f''_m(x_2))$. Mit dem Diagonalverfahren finden wir sukzessiv eine Folge $f_{m_k} \subset (f_m)$, so dass $f_{m_k}(x_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert. Wir definieren $g_k := f_{m_k}$ und wollen zeigen, dass g_k punktweise konvergent ist.
Seien $x \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann folgt aus (ii) die Existenz von $\rho = \rho(\varepsilon)$ mit

$$f_m(B_\rho(x)) \subset B_\varepsilon(f_m(x))\ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Da $g_k(x_i)$ konvergent ist gilt $|g_p(x_i) - g_q(x_i)| < \varepsilon$, falls $p, q \geq n_0 = n_0(\varepsilon, i)$. Zu $\delta > 0$ existiert $i > 1$ mit $x_i \subset B_\rho(x)$ und es folgt für alle $p, q \geq n_0$

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_q(x_i)| + |g_q(x_i) - g_q(x)| < 3\varepsilon. \tag{14}$$

Demnach ist $(g_k(x))$ für alle $x \in \Omega$ eine C.F., d.h.

$$g(x) := \lim_k g_k(x)$$

existiert für alle $x \in \Omega$. Wir müssen noch zeigen

- g is stetig;
- $g_k \to g$ gleichmäßig bei $k \to \infty$.

Sei $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Wählen wir δ wie in (13), so erhalten wir für alle $y \in B_\rho(x)$

$$|g(y) - g(x)| = \lim_k |g_k(y) - g_k(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. g ist stetig. Die gleichmäßige Konvergenz sieht man wie folgt: Nehmen wir an, wir hätten keine gleichmäßige Konvergenz. Dann existiert eine Teilfolge $(g'_k) \subset (g_k)$ und ine Folge $x_k \subset \Omega$ mit

$$|g'_k(x_k) - g(x_k)| \geq 3\varepsilon.$$

Ohne Einschränkung nehmen wir an $x_k \to: x$ (sonst gehe man zu Teilfolgen über). Für $n \gg 1$ ist $x_n \in B_\rho(x)$ und aus (14) folgt

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &\leq |g'_k(x_k) - g(x_k)| \\ &\leq |g'_k(x_k) - g'_k(x)| + |g'_k(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_k)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Das folgende Lemma zeigt schlielich noch welche Bedingung notwendig ist für Kompaktheit in $L^p(\Omega)$. *Lemma von Riesz* (siehe etwa [Ad], Thm. 2.21 oder [Alt], Satz 4.24):

Lemma 5.14 (Riesz).
Seien $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $(u_m) \subset L^p(\Omega)$ beschränkt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere ein $\omega \Subset \Omega$ und ein $\delta > 0$ gibt, derart dass gilt:

$$\sup_m \int_\Omega \left|\bar{u}_m(x+h) - u(x)\right|^p dx \leq \varepsilon^p \quad \text{und} \quad \sup_m \int_{\Omega\setminus\overline{\omega}} \left|u_m(x)\right|^p dx \leq \varepsilon^p$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| < \delta$. Dann existiert eine Teilfolge (u_{m_k}) und $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_{m_k} \to u$ in $L^p(\Omega)$.

Bemerkung 5.15. *a) In Lemma 5.14 bedeutet die zweite Bedingung, dass die Elemente einer relativ kompakten Menge auf „Randstreifen“ im L^p–Sinn gleichmäig klein werden müssen.*

b) Wie auch schon im Satz von Arzela-Ascoli sind obige Bedingungen notwendig und hinreichend für Kompaktheit in $L^p(\Omega)$.

Kapitel 6

Punktweise Eigenschaften und Randverhalten

Wir wissen können Lebesgue-Funktionen nur bis auf Nullmengen eindeutig definiert werden. Der folgende Satz (Differentationssatz von Lebeguse) charakterisiert dies mit Hilfe von Mittelwertintegralen, Später werden wir sehen, dass die Aussage für Sobolev-Funktionen verbessert werden kann.

Satz 6.1. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x)} u \, dz = u(x)$$

für f.a. $x \in \Omega$.

Satz 6.2. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $s \in [0, d)$. Wir betrachten die Menge*

$$\Lambda_s := \Lambda_s(u) := \left\{ x \in \Omega : \limsup_{r \to 0} \frac{1}{r^s} \int_{B_r(x)} |u| \, dz > 0 \right\}.$$

Es gilt $\mathcal{H}^s(\Lambda_s) = 0$.

Ein wesentliches Hilfsmittel zum Beweis ist der Überdeckungssatz von Vitali.

Lemma 6.3. *Sei $\mathscr{B}$ eine Familie von abgeschlossenen Bällen in $\mathbb{R}^d$ mit gleichmäßig beschränkten Radien, d.h.*

$$\sup_{B \in \mathscr{B}} \operatorname{diam}(B) < \infty.$$

Dann gibt es eine abzählbare Teil-Familie $' \subset \mathscr{B}$ mit

1. *Die Kugeln in $\mathscr{B}'$ sind disjunkt;*
2. *für alle $B \in \mathscr{B}$ existiert $B' \in \mathscr{B}'$ mit $B \cap B' \neq \emptyset$ und $B \subset 5B'$.*

Beweis von Satz 6.2: Nach Satz 6.1 wissen wir $\mathcal{L}^d(\Lambda_s) = 0$. Das Haussdorff-Maß kann folgendermaßen definiert werden: Betrachte für $A \in \mathbb{R}^d$ und $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s) \Big(\frac{\operatorname{diam}(A_k)}{2} \Big)^s : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \ A_k \subset \mathbb{R}^d, \ \operatorname{diam}(A_k) \leq \delta \, \forall k \right\}.$$

Hierbei ist $\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ eine dimensionsabhängige Konstante. Das Hausdorff-Maß ist definiert als

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\sup 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Sei zunächst $u \in L^1(\Omega)$ (ansonsten argumentieren wir auf inneren Parallelmengen), $U \subset \Omega$ und $\sigma > 0$. Dann existiert $\eta > 0$, so dass $\mathcal{L}^d(U) < \eta$ impliziert $\int_U |u|\, dz < \sigma$ (Stetigkeit des Integrals bzgl. U). Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\Lambda_s^\varepsilon := \left\{ x \in \Omega : \ \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^s} \int_{B_r(x)} |u|\, dz > \varepsilon \right\}.$$

Wir erhalten wieder $\mathcal{L}^d(\Lambda_s^\varepsilon) = 0$. Daher existiert eine offene Menge $U \subset \Omega$ mit $\Lambda_s^\varepsilon \subset U$ und $\mathcal{L}^d(U) < \eta$. Wir definieren

$$\mathscr{B} := \left\{ \overline{B}_r(x) : \ x \in \Lambda_s^\varepsilon, \ 0 < r < \delta, \overline{B}_r(x) \subset U, \int_{B_r(x)} |u|\, dz > \varepsilon r^s \right\}.$$

Offenbar ist $\mathscr{B}$ eine Überdeckung von $\{\Lambda_s^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Für die Kugeln in $\mathscr{B}$ gilt $\operatorname{diam}(B_r(x)) < 2\delta$. Daher ist der Überdeckungssatz von Vitali anwendbar und wir finden eine abzählbare Familie $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ disjunkter Bälle aus $\mathscr{B}$ mit

$$\Lambda_s^\varepsilon \subset \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subset \bigcup_{B\in\mathscr{B}'} \widehat{B} =: \bigcup_{i=1}^\infty B_{5r_i}(x_i)$$

mit $o < r_i < \delta$ und $x_i \in \Lambda_s^\varepsilon$. Die Definition des Hausdorff-Maßes ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_{10\delta}(\Lambda_s^\varepsilon) &\leq \sum_{i=1}^\infty \alpha(s)(5r_i)^s \leq \frac{\alpha(s)5^s}{\varepsilon} \sum_{i=1}^\infty \int_{B_{r_i}(x_i)} |u|\, dz \\ &\leq \frac{\alpha(s)5^s}{\varepsilon} \int_U |u|\, dz \leq \frac{\alpha(s)5^s}{\varepsilon} \sigma. \end{aligned}$$

Es folgt mit $\delta \to 0$

$$\mathcal{H}^s(\Lambda_s^\varepsilon) \leq \frac{\alpha(s)5^s}{\varepsilon}\sigma \xrightarrow{\sigma\to 0} 0.$$

Die Stetigkeit des Maßes von oben ergibt

$$\mathcal{H}^s(\Lambda_s^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathcal{H}^s(\Lambda_s).$$

da $\{\Lambda_s^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine fallende Familie von Mengen ist. □

Korollar 6.4. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ mit $s \in [0, d)$ und $1 \leq p < \infty$. Es gilt*

$$\fint_{B_r(x)} |u - (u)_{B_r(x)}|^p\, dz \longrightarrow 0, \quad r \to 0,$$

für $\mathcal{H}^{n-p}$-f.a. $x \in \Omega$.

Beweis: Mit der Poincaré-Ungleichung erhalten wir

$$r^{-d}\int_{B_r(x)} |u-(u)_{B_r(x)}|^p\,dz \le cr^{p-d}\int_{B_r(x)} |\nabla u|^p\,dz \longrightarrow 0$$

bei $r \to 0$ für alle $x \in \Omega \setminus \Lambda_{d-p}(|\nabla u|^p)$, also für $\mathcal{H}^{n-p}$-f.a. x nach Satz 6.2. $\square$

Bisher haben wir Randwerte von Sobolev-Funktionen im folgenden Sinn interpretiert: $u = u_0$ auf $\partial\Omega$ genau dann, wenn $u - u_0 \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, wobei $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ für $p < \infty$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. Wir werden in diesem Kapitel eine präzisere Definition von Randwerten erarbeiten und zeigen, dass diese mit der uns gewohnten übereinstimmt.

Zunächst benötigen wir dazu noch eine verbesserte Version des Approximationssatzes „H=W“von Meyers-Serrin. Notwendig dazu, sowie für die Folgeüberlegungen ist ein vernünftigerRand $\partial\Omega$ von Ω. Unter allgemeinen Bedingungen (wie in Kapitel 2) ist die Aussage falsch. Einen Beweis findet man in [Ad], Thm. 3.18.

Satz 6.5. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und genüge einer inneren Kegelbedingung. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p < \infty$: $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $W^{k,p}(\Omega)$*

Bemerkung 6.6. *a) Eine innere Kegelbedingung bedeutet, dass es EINEN Kegel gibt, der in JEDEM Randpunkt so angelegt werden kann, dass der gesamte Kegel in Ω liegt. Dies schließt z.B. exponentielle Spitzen aus. Eine innere Kegelbedingung ist unter anderem erfüllt, wenn $\partial\Omega$ ein Lipschitz-Rand ist.*

b) Im Gegensatz zu Satz 1.6 gibt es hier eine Folge (u_m), bestehend aus Funktionen, die bis zum Rand glatt sind mit $\|u_m - u\|_{k,p} \to 0$ bei $m \to \infty$. In Satz in 1.6 erhielt man nur $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Im Folgenden benötigen wir Räume von Funktionen die über den Rand integrierbar sind, d.h. für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen sei $L^p(\partial\Omega)$:= Menge aller $\mathcal{H}^{d-1}$-messbaren Funktionen mit

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |f|^p\,d\mathcal{H}^{d-1}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Für C^1-Funktionen definieren wir den Operator $\mathcal{B} : C^1(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ durch $\mathcal{B}u := u|_{\partial\Omega}$ und erhalten (vgl. [Alt])

Lemma 6.7. *Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt*

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c(d,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ betrachten wir eine Approximationsfolge $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und $\|u_m - u\|_{1,p} \to 0$, deren Existenz nach Satz 6.6 gewährleistet ist. Aus Lemma 6.7 folgt, dass $(\mathcal{B}u_m)$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\partial\Omega)$. Der Limes dieser Folge, der nich von der speziellen Wahl der Folge abhängt wird nun als Spur von u bezeichnet.

Definition 6.8. *Der Operator $\mathcal{B} \to W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand, $1 \le p < \infty$) mit $\mathcal{B}u := L^p(\partial\Omega)$-Limes von $u_m|_{\partial\Omega}$ ((u_m) Approximationsfolge zu u) heißt Spur-Operator.*

Bemerkung 6.9. *a) Der Fall $p = \infty$, der hier ausgeschlossen wurde, kann einfacher ebhandelt werden, falls Ω konvex ist. In dieser Situation gilt $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathrm{Lip}(\Omega)$ (vgl. Lemma 5.12). Lipschitz-stetige Funktionen können unter Erhalt der Lipschitz-Konstanten zum Rand fortgestezt werden. Außerdem gilt nach Satz 5.4 $W^{1,\infty}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ (auch ohne Konvexität), so dass hier Randwerte wie gewohnt definiert werden können.*

b) Es lässt sich zeigen (vgl. [Mo], Thm. 3.6.3), dass $\mathcal{B}u$ für $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ die klassische Spur von u auf $\partial\Omega$ ist.

Wir kommen zu dem entscheidenden Satz dieses Kapitels

Satz 6.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschtz-Rand. Dann gilt für $1 \le p < \infty$*

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega);\ \mathcal{B}u = 0 \right\}.$$

Beweis: Die Hinrichtung ist klar: Jede Funktion $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ lässt sich nach Definiton durch $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen approximieren (bzgl der $W^{1,p}(\Omega)$-Norm). Aufgrund der Stetigkeit des Spuroperators (vgl. Lemma 6.7) folgt

$$0 = \mathcal{B}u_m \longrightarrow \mathcal{B}u$$

in $L^p(\partial\Omega)$ bei $m \to \infty$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\mathcal{B}u = 0$. Ein entscheidender Schritt betsehzt darin zu zeigen, dass die Fortsetung

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases}$$

von u schwach differnzierbar ist. Wir wählen eine Approximationsfolge $(u_m) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ für u und berechnen für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} v \,\mathrm{div}\varphi \, dx &= \int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx = \lim_m \int_\Omega u_m \,\mathrm{div}\varphi \, dx \\
&= \lim_m \left(\int_{\partial\Omega} u_m \, \varphi \cdot \mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1} - \int_\Omega \nabla u_m \cdot \varphi \, dx \right) \\
&= \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}u \, \varphi \cdot \mathcal{N} \, d\mathcal{H}^{d-1} - \int_\Omega \nabla u \cdot \varphi \, dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\Omega \nabla u \cdot \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Das heißt es gilt

$$v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

mit $\nabla v = \chi_\Omega \nabla u$.
Ω hat Lipschitz-Rand, falls sich $\partial\Omega$ durch endlich viele offene Mengen $U^1, .., U^l$ überdecken lässt, so dass $\partial\Omega \cap U^j$ für $j = 1, ..., l$ der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist und $\Omega \cap U^j$ auf jeweils einer Seite dieses Graphen liegt. Mathematisch lässt sich das folgendermaßen formulieren: Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ und für $j = 1, .., l$ ein euklidisches Koordiantensystem $e_i^j, ..., e_d^j$ in $\mathbb{R}^d$, einen Referenzpunkt $y^j \in \mathbb{R}^{d-1}$, Zahlen

$r^j > 0$ und $h^j > 0$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $g^j : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$, so dass mit der Bezeichnung

$$x^j_{,d} := (x^j_1, ..., x^j_{d-1}), \;\; x = \sum_{i=1}^d x^j_i e^j_i,$$

gilt

$$U^j = \left\{x \in \mathbb{R}^d;\; |x^j_{,d} - y^j| < r^j \text{ und } |x^j_d - g^j(x^j_{,d})| < h^j\right\},$$

und für $x \in U^j$

$$\begin{aligned} x^j_d = g^j(x^j_{,d}) &\implies x \in \partial\Omega, \\ 0 < x^j_d - g^j(x^j_{,d}) < h^j &\implies x \in \Omega, \\ 0 > x^j_d - g^j(x^j_{,d}) &\implies x \notin \Omega. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^l U^j$$

und, wenn wir noch eine passende offene Menge U^0 mit $\overline{U^0} \subset \Omega$ hinzunehmen,

$$\Omega \subset \bigcup_{j=0}^l U^j.$$

Wir lokalisieren bezüglich der Mengen U^j, $j = 0, ..., j$. Dazu sei $\eta^0, ..., \eta^l$ eine Partition der Eins bezüglich $\overline{\Omega}$, d.h. $0 \le \eta^j \le 1$, $\eta^j \in C^\infty_0(U^j)$ und

$$\sum_{j=0}^l \eta^j = 1 \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$, so gilt

$$u = \sum_{j=0}^l \eta^j u.$$

Insbesondere ist $\eta^0 u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω und für $j = 1, ..., l$ ist $\eta^j u \in W^{1,p}(\Omega^j)$, wenn

$$\Omega^j := \left\{x \in \mathbb{R}^d;\; 0 < x^j_d - g^j(x^j_{,d})\right\},$$

wobei $(\eta^j u)(x) = 0$, falls $|x^j_{,d} - y^j| \ge r^j$ oder $x^j_d - g^j(x^j_{,d}) \ge h^j$. Durch Approximation von u sieht man

$$\mathcal{B}(\eta^j u) = \lim_m \mathcal{B}(\eta^j u_m) = \lim_m \eta^j u_m|_{\partial\Omega} = \lim_m \eta^j|_{\partial\Omega} u_m|_{\partial\Omega} = \mathcal{B}\eta^j \mathcal{B}u = 0$$

für $j = 1, ..., l$. Definieren wir

$$v_j(x) := \begin{cases} (\eta^j u)(x) & ; \quad x \in \Omega^j \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Es folgt $v_j \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, also für $\delta > 0$ auch

$$v_{j,\delta} := v_j(x - \delta e^j_d)$$

und es konvergiert $v_{j,\delta} \to v_j$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Außerdem gilt wegen $\mathcal{B}v_j = 0$ $\operatorname{spt} v_j \Subset \Omega$. Somit konvergiert auch

$$u_\delta := \eta^0 u + \sum_{j=1}^{k} v_{j,\delta} \longrightarrow u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega) \text{ bei } \delta \to 0.$$

Da u_δ aber kompakten Träger in Ω hat, lässt sich diese Funktion mittels Glättung durch Funktionen in $C_0^\infty(\Omega)$ approxmieren. Es folgt $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Korollar 6.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann gilt $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) = \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$*

Beweis Wegen $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$ und $\mathring{W}^{1,q}(\Omega) = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ für beschränktes Ω ist die Inkulsion '$\subset$' klar. Man beachte, dass $\mathring{W}^{1,q}(\Omega)$-Funktionen durch glatte Funktionen in $W^{1,q}$ approximiert werden können, während in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ nur die schlechtere Approximation in $W^{1,p}(\Omega)$ verfügbar ist. Mit dem Spursatz 6.10 ergibt sich aber: $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega) \Longrightarrow u \in W^{1,q}(\Omega)$ und $\mathcal{B}u = 0 \Longrightarrow u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. □

Zum Abschluss dieses Kapitels besprechen wir noch eine Variante der Sätze von Sobolev und Rellich-Kondrachov für den Spur-Operators. Einen Beweis findet man in etwa in [Ad], Thm. 5.22.

Satz 6.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

a) Für $p < d$ ist die Einbettung

$$\mathcal{B}(W^{1,p}(\Omega)) \subset L^q(\partial\Omega)$$

für alle $q \leq \frac{(d-1)p}{d-p}$ stetig.

b) Für $q < \frac{(d-1)p}{d-p}$ ist obige Einbetung kompakt.

Bemerkung 6.13. *a) Man beachte, dass für $p > d$ $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ gilt (nach Satz 5.4). In diesem Fall existiert die Spur also im klassischen Sinn.*

- *b) Der Integrabilitätsexponent in Satz 6.12 ist schlechter als im Satz von Sobolev: Für $p = 1$ bekommt man keine neue Aussage (im Vergleich zu Lemma 6.7), für $p > 1$ gilt aber $\frac{(d-1)p}{d-p} > p$.*

c) Satz 6.12 zeigt insbesondere, dass für $p > 1$ $\mathcal{B}(W^{1,p}(\Omega)) \subsetneqq L^p(\partial\Omega)$ gilt. Im Fall $p = 1$ erhält man $\mathcal{B}(W^{1,1}(\Omega)) = L^1(\partial\Omega)$.

Kapitel 7

Fraktionale Sobolev-Räume

In diesem Kapitel werden wir uns mit Sobolev-Räumen beschäftigen, deren Differenzierbarkeitsstufe keine ganze Zahl ist. Beispielsweise wird für $\Theta \in (0,1)$ der Raum $W^{\theta,2}$ definiert mit

$$L^2 \subsetneqq W^{\Theta,2} \subsetneqq W^{1,2}.$$

Inbesondere gibt es auch hier Versionen des Satzes von Sobolev, die zeigen, dass die Integrabilität im Raum $W^{\Theta,2}$ besser ist als im L^2, aber schlechter als in $W^{1,2}$. Auch mit Differenzenquotienten kann ein Zusammenghang hergestellt werden: Im $W^{1,2}$ gilt bekanntlich

$$\|\Delta_h u\|_2^2 \leq c,$$

whrend im L^2

$$\|\Delta_h u\|_2^2 \leq ch^{-2}$$

richtig ist. Passend dazu liefert $W^{\Theta,2}$

$$\|\Delta_h u\|_2^2 \leq ch^{2\Theta-2}.$$

Es gibt verschiedene Zugnge zur Definition dieser Räume. Wir werden die Räume $W^{\Theta,p}$ mit Hilfe der Fourier-Transformation definieren. Da die Fouriertransformation aus der Ableitung eine Multiplikation macht, erscheint dieser Ansatz am einfachsten. Zunächst werden wir uns daher mit den Eigenschaften der Fourier-Transformation beschäftigen.

Definition 7.1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist*

$$\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}^d$$

die Fourier-Transformierte zu f.

Die folgenden Eigenschaften lassen sich elemtar beweisen.

Lemma 7.2. *a) Die Abbildung $f \mapsto \widehat{f}$ ist linear;*

b) $\|\widehat{f}\| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|f\|_1$ und $\widehat{f}$ ist stetig;

c) $\widehat{\partial_{x_\gamma} f} = ik_\gamma \widehat{f}$;

d) $\widehat{-ix_\gamma f} = \partial_{k_\gamma} \widehat{f}$, falls $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$.

Mit obiger Definition sind wir lediglich in der Lage die Fourier-Transformation fr L^1-Funktionen zu definieren. Da $L^1(\mathbb{R}^d)$ anders als bei beschränkten Gebieten nicht $L^p(\mathbb{R}^d)$ enthlt, scheint diese Definiton nur von bedingtem Nutzen zu sein. Außerderm ist die Rücktransformation

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \widehat{f}(x)\, dx$$

nur mglich, wenn $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt. Dies ist aber im Allgemeinen falsch.

Definition 7.3. *Die Schwartz-Klasse $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist definiert als Menge aller Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)| = p_{\alpha,\beta}(f) < \infty$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$.

Offenbar gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ enthält aber auch Funktionen, die keinen kompakten Trger haben wie z.B. $e^{-|x|^2}$. $(p_{\alpha,\beta})$ ist eine abzählbare Familie von Seminormen auf $\mathcal{S}$ und gestatte es uns eine Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zu definieren: Eine Folge $(\phi_k) \subset \mathcal{S}$ konvegriert gegen 0 genau dann wenn fr alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$

$$\lim_{k\to\infty} p_{\alpha,\beta}(\phi_k) = 0.$$

Mit dieser Topologie ist $\mathcal{S}$ ein Fréchet-Raum (vollständig und metrisierbar) un liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere gilt $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, d.h. die Fourier-Transformation im Sinne von Def. 7.1 ist wohldefiniert auf $\mathcal{S}$.

Definition 7.4. *Die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, wird als Menge der temperierten Distributionen bezeichnet. Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ gehört zu $\mathcal{S}'$, falls*

$$\lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = 0 \quad \textit{sobald} \quad \lim_{k\to\infty} \phi_k = 0 \ \textit{in}\ \mathcal{S}.$$

Satz 7.5. *Die Fourier-Transformation ist eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\, dz = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g\, dz \tag{1}$$

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \widehat{f}(x)\, dx \tag{2}$$

für alle $f \in \mathcal{S}$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die folgende Hilfsaussage

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f}(k) = e^{-\frac{1}{2}|k|^2}. \tag{3}$$

Offenbar gilt hier

$$f(x) = \prod_{i=1}^d e^{-\frac{1}{2}x_i^2} =: \prod_{i=1}^d f_i(x_i)$$

und damit

$$\widehat{f}(k) = \prod_{i=1}^{d} \widehat{f}_i(k_i).$$

Daher genügt es sich (3) in einer Dimension zu Beweisen. Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ is Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u' + xu &= 0 \\ u(0) &= 1. \end{aligned}$$

Mit Lemma 7.2 c) und d) folgt, dass $\widehat{f}$ die selbe Differentialgleichung löst mit Startwert

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1.$$

Der Satz von Picard-Lindelöff zeigt $\widehat{f} = f$.
Mit Lemma 7.2 c) und d) sieht man

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi) = (-1)^{|\beta|} i^{|\alpha|-|\beta|} \widehat{D^\alpha x^\beta} f(\xi)$$

so dass

$$|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)| = \|\widehat{D^\alpha x^\beta f}\|_\infty \leq c\|D^\alpha x^\beta f\|_1.$$

Die rechte Seite kann jetzt durch eine endliche Linearkombination von Seminormen beschränkt werden, D.h. $f_k \to 0$ in $\mathcal{S}$ impliziert $\widehat{f_k} \to 0$ in $\mathcal{S}$.
Mit dem Sazu von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,dz &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-izx} g(x)\,dx\,dz \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-izx} g(x)\,dz\,dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ixz} f(z)\,dz\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g\,dz. \end{aligned}$$

Fr $g(x) = \lambda^{-d} f(\lambda^{-1}x)$ ist $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(\lambda k)$, also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(\lambda x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) \lambda^{-d} g(\lambda^{-1}x)\,dx \\ \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda^{-1}x)\widehat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(\lambda^{-1}x)\,dx. \end{aligned}$$

Gleichmäßige Konvergenz ergibt fr $\lambda \to \infty$

$$f(0) \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(x)\,dx = g(0) \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\,dx.$$

Wählen wir $g(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ erhalten wir wegen (3)

$$f(0) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(k)\,dk,$$

also (2) für $x = 0$. Erstzen wir f durch die Abbildung $z \mapsto f(x+z)$ mit fixiertem x folgt

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ikx} \widehat{f}(k)\, dk$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. □

Definition 7.6. *Für ein Element $T \in \mathcal{S}'$ definieren wir die Fourier-Transformierte als die get. Distribution $\widehat{T}$ mit*

$$\widehat{T}(f) = T(\widehat{f}), \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Mit Satz 7.5 sieht man, dass die Fourier-Transformation $\widehat{T}$ stetig auf $\mathcal{S}$ ist und damit zu $\mathcal{S}'$ gehört. Wird T durch eine $L^1(\mathbb{R}^d)$-Funktion u_T erzeugt, so erhlt man für $f \in \mathcal{S}$ mit (1)

$$\widehat{T}(f) = T(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} u_T \widehat{f}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}_T f\, dx,$$

d.h. $\widehat{T}$ entspricht der Fourier-Transformierten in ihrer ursprnglichen Definition.

Satz 7.7. *Die Fourier-Transformierte ist eine stetig-lineare Bijektion von $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ mit stetiger Inverser.*

Beweis: Es gelte $T_n \to T$ in $\mathcal{S}'$, dann erhalten wir fr alle $f \in \mathcal{S}$

$$\widehat{T}_n(f) = T_n(\widehat{f}) \to T(\widehat{f}) = \widehat{T}(f),$$

also die Stetigkeit. Aus (2) folgt, dass die Fourier-Transformation Periode vier hat (d.h. viermal angewendet ergbt sie die Identität). Die Inverese der Fourier-Transformation ist also äquivalent zur dreifachen Anwendung, woraus invertierbarkeit und Stetigkeit der Inversen folgen. □

Wir wollen nun die Fourier-Transformierte fr Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, definieren. Wir betrachten

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f\phi\, dx, \qquad \phi \in \mathcal{S}.$$

Offensichtlich ist dieses Integral endlich. Die Stetigkeit von T_f sieht man wie folgt: es gelte $\phi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$, dann ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung

$$|T_f(\phi_k)| \le \|f\|_p \|\phi_k\|_{p'},$$

wobei die rechte Seite gegen Null konvergiert.

Satz 7.8. *Die Fourier-Transformation ist eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, d.h. fr $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Beweis: Wir setzen in (1) $g = \overline{\widehat{f}}$ und erhalten wegen $\widehat{g} = \overline{f}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \overline{f}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} \cdot \overline{\widehat{f}}\, dx \quad \Longleftrightarrow \quad \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

für alle $f \in \mathcal{S}$. Da $\mathcal{S}$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, erhalten wir die Aussage auf ganz $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkung 7.9. • *Für Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ erhlt man die üblichen Formeln für die Fourier-Transformierte (7.1) und (2).*

• *Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p \le 2$, so lässt sich immer noch zeigen, dass $\widehat{f}$ eine Funktion ist und es gilt*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p.$$

Mit diesen Vorbereitungen sind wir jetzt in der Lage Sobolev-Räume $W^{\Theta,p}$ für $\Theta \notin \mathbb{N}$ zu definieren. Zunächst sei $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Norm von u und der Norm der Fourier-Transformierten $\mathcal{F}(u)$ herstellen. Nach Satz 7.8 ist

$$\begin{aligned}\|u\|_{1,2}^2 &= \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \|\mathcal{F}(u)\|_2^2 + \|\mathcal{F}(\nabla u)\|_2^2 = \|\mathcal{F}(u)\|_2^2 + \|ik\mathcal{F}(u)\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|k|^2)|\widehat{u}|^2\,dk.\end{aligned}$$

Allgemeiner betrachten wir fr $\Theta \in \mathbb{R}$ das Bessel-Potential

$$J^\Theta u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left((1+|k|^2)^{-\frac{\Theta}{2}}\mathcal{F}(u)(k)\right), \quad u \in \mathcal{S}.$$

Offenbar gilt $(J^\Theta)^{-1} = J^{-\Theta}$ sowie

$$\|u\|_{1,2} = \|(J^1)^{-1}u\|_2.$$

Definition 7.10. *Sei $\Theta \ge 0$ und $1 < p < \infty$. wir definieren*

$$\begin{aligned}L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) &:= J^\Theta(L^p(\mathbb{R}^d)),\\ \|u\|_{\Theta,p} &:= \|(J^\Theta)^{-1}u\|_p.\end{aligned}$$

Die Definition ergibt zwar auch für $p = 1$ und $p = \infty$ Sinn, das folgende Resultat gilt aber im Grenzfall nicht mehr (vgl. [St] Kap. 6.6).

Satz 7.11. *Sei $\Theta \in \mathbb{N}_0$ und $1 < p < \infty$, dann gilt*

$$L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) = W^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$$

und die Normen sind äquivalent.

Der Beweis folgt im Wesentlichen aus dem folgenden Lemma (siehe [St])

Lemma 7.12. *Sei $\Theta \ge 1$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt $u \in L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ genau dann wenn $u \in L^{\Theta-1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\partial_j u \in L^{\Theta-1,p}(\mathbb{R}^d)$ für alle $j \in \{1,...,d\}$ ist. Die Normen*

$$\|u\|_{\Theta,p}, \quad \|u\|_{\Theta-1,p} + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_{\Theta-1,p}$$

sind äquivalent.

Beweis von Satz 7.11.
Für $\Theta = 0$ ist $J^0 = \mathrm{id}$, so dass die Aussage trivial ist. Den Fall $\Theta = 1$ kann man mit Hilfe von Lemma 7.12 auf die Situation $\Theta = 0$ zurückführen. Der Rest folgt induktiv.□

Die wichtigsten Eigenschaften der Räume $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ sind im folgenden Satz zusammengefasst (vgl. [Ad], Thm. 7.63)

Satz 7.13. *Sei $\Theta \geq 0$ und $1 < p < \infty$, dann gilt*

a) $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ *ist ein reflexiver Banachraum.*

b) $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *liegt dicht in* $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$.

c) Es ist $[L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)]' \cong L^{-\Theta,p'}(\mathbb{R}^d)$.

d) für $\Theta_1 < \Theta_2$ *ist die Einbettung* $L^{\Theta_2,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{\Theta_1,p}(\mathbb{R}^d)$ *stetig.*

e) Ist $\Theta_1 \leq \Theta_2$ *und*

$$
\begin{aligned}
1 < p \leq q \leq \tfrac{dp}{d-(\Theta_2-\Theta_1)p} < \infty \quad & \text{fr } p > 1;\\
1 \leq q < \tfrac{d}{d-\Theta_2+\Theta_1} < \infty \quad & \text{fr } p = 1;
\end{aligned}
$$

dann ist die Einbettung $L^{\Theta_2,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{\Theta_1,q}(\mathbb{R}^d)$ *stetig.*

f) Fr $0 \leq \mu \leq \Theta - \frac{d}{p} < 1$ *gilt* $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) \subset C^{0,\mu}(\mathbb{R}^d)$.

Als Beispiel betrachten wir die Einbettungen

$$
\begin{aligned}
L^{\Theta,2}(\mathbb{R}^d) &\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \quad 2 \leq q < \frac{2d}{d-2\Theta},\\
L^{\Theta,2}(\mathbb{R}^d) &\hookrightarrow C(\mathbb{R}^d), \quad 2\Theta > d.
\end{aligned}
$$

Falls $q > 2$ ist erhalten wir mit Bemerkung 7.9

$$
\begin{aligned}
\|u\|_q^{q'} \leq c\|\widehat{u}\|_{q'}^{q'} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{\Theta q'}{2}} \left(1+|k|^2\right)^{\frac{\Theta q'}{2}} |\widehat{u}|^{q'}\, dk\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{\Theta q'}{2-q'}} dk \right)^{1-\frac{q'}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|k|^2\right)^{\Theta} |\widehat{u}|^2\, dk \right)^{\frac{q'}{2}}.
\end{aligned}
$$

Dabei gilt $\left(1+|k|^2\right)^{-\frac{\Theta q'}{2-q'}} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt

$$
-\frac{2\Theta q'}{2-q'} < -d \quad \Leftrightarrow \quad q' > \frac{2d}{d+2\Theta} \quad \Leftrightarrow \quad q < \frac{2d}{d-2\Theta}
$$

so dass

$$
\|u\|_q \leq c(\Theta, d)\|u\|_{\Theta,2}.
$$

Für $q = \infty$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|u\|_\infty \leq c\|\widehat{u}\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{\Theta}{2}} \left(1+|k|^2\right)^{\frac{\Theta}{2}} |\widehat{u}|\, dk\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|k|^2\right)^{-\Theta} dk \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|k|^2\right)^{\Theta} |\widehat{u}|^2\, dk \right)^{\frac{q'}{2}}.
\end{aligned}
$$

Nun ist $\left(1+|k|^2\right)^{-\Theta} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sofern $-2\Theta < -d$ gilt.

Bemerkung 7.14. • *Die Abbildung* $J^\Theta : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ *ist ein Isomorphismus, so dass die Reflexivität der Räume :* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *und* $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ *äquivalent ist (sofern man gezeigt hat, dass* $L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d)$ *ein Banachraum ist).*

- *Aussage d) zeigt, dass die Güte einer Funktion mit wachsender Differenzierbarkeitsstufe wächst, wie es zu erwarten ist bei einer sinnvollen Definition.*
- *e) und f) sind Sobolev-Einbettungen für fraktionale Sobolev-Räume. Ist $\Theta \in \mathbb{N}$, so erhält man die uns bekannten Aussagen aus Kapitel 5.*

Ebenfalls in der Literatur weit verbreitet ist die folgende Definition für fraktionale Sobolev-Räume. Man definiert fr $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\|u\|_{\Theta,p}^{\sim} := \left\{ \|u\|_{m,p}^p + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{d+\sigma p}} \, dx \, dy \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

für $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\Theta = m + \sigma$ für $\sigma \in (0,1)$. Der Raum $\widetilde{L}^{\Theta,p}(\Omega)$ ist dann definiert als Menge aller messsbaren Funktionen für die obige Norm endlich ist. Es lässt sich zeigen

- Für $\Theta \in \mathbb{N}_0$ erhält man die gewhnlichen Sobolev-Rume.
- Für $\epsilon > 0$ und alle Θ gilt
$$\widetilde{L}^{\Theta+\epsilon,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{\Theta,p}(\mathbb{R}^d) \subset \widetilde{L}^{\Theta-\epsilon,p}(\mathbb{R}^d).$$
- Die Aussagen aus Satz 7.13 gelten auch für die Räume $\widetilde{L}^{\Theta,p}(\Omega)$, falls $\partial\Omega$ vernünftig ist.

Der Vorteil in der Definition (4) ist, dass als Menge nicht unbedingt der gesamte $\mathbb{R}^d$ benötigt wird.

Satz 7.15. *Sei $\Theta \geq 0$. Dann sind die Normen $\|u\|_{\Theta,2}$ und $\|u\|_{\Theta,2}^{\sim}$ auf $\mathbb{R}^d$ äquivalent.*

Beweis: Wir erhalten für $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$

$$\|\partial^\gamma u\|_2 = \|k^\gamma \widehat{u}\|_2.$$

Außerdem gilt

$$\partial^\gamma u(x+z) - \partial^\gamma u(x) = \mathcal{F}^{-1}\big((e^{ik\cdot z} - 1)\mathcal{F}(\partial^\gamma u)\big)(x)$$

was wiederum

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\gamma u(x+z) - \partial^\gamma u(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{ik\cdot z} - 1|^2 |\mathcal{F}(\partial^\gamma u)\big)k|^2 \, dk$$

ergibt. Daher haben wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|^s}{|x-y|^{d+2\sigma}} \, dx \, dy &= \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\gamma u(x+z) - \partial^\gamma u(x)|^s}{|z|^{d+3\sigma}} \, dx \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |k|^{2\sigma} \mathcal{F}(\partial^\gamma u)\big)k|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{ik\cdot z} - 1|^2}{|k|^{2\sigma}|z|^{d+2\sigma}} \, dz \, dk.\end{aligned}$$

Wir wählen $\omega = |k|^{-1}k$ und $y = |k|z$ so dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{1k\cdot z} - 1|^2}{k^{2\sigma}|z|^{d+2\sigma}}\,dz = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\omega\cdot y} - 1|^2}{|y|^{d+2\sigma}}\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{2(1 - \cos(\omega\cdot y))}{|y|^{d+2\sigma}}\,dy.$$

Da der Wert des Integrals unabhängig von ω ist[1] folgt

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|^s}{|x-y|^{d+2\sigma}}\,dx\,dy = c_\sigma \int_{\mathbb{R}^d} |k|^{2\sigma}\mathcal{F}(\partial^\gamma u)\big)k|^2\,dk$$
$$= \||k|^\sigma k^\gamma \widehat{u}\|_2^2.$$

Insgesamt haben wir gezeit, dass

$$\big(\|u\|_{\widetilde{\Theta,2}}\big)^2 = \sum_{|\gamma|\le m}\left(\|k^\gamma\widehat{u}\|_2^2 + c_\sigma\||k|^\sigma k^\gamma\widehat{u}\|_2^2\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{|\gamma|\le m}\left(|k^\gamma|^2 + c_\sigma|k|^{2\sigma}|k^\gamma|^2\right)|\widehat{u}|^2\,dk$$
$$\sim \int_{\mathbb{R}^d}\big(1+|k|^2\big)^{m+\sigma}|\widehat{u}|^2\,dk$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\big(1+|k|^2\big)^{\Theta}|\widehat{u}|^2\,dk = \|u\|_{\Theta,2}^2.$$

Als letztes Resultat besprechen wir eine Version des Lemmas über den Zusammenhang zwischen schwacher Differenzierbarkeit und Differenzenquotienten (vgl. [Ad]).

Lemma 7.16. *Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ und es gelte für $\beta \in (0,1]$, $M > 0$,*

$$\sum_{\gamma=1}^d \int_\omega |\Delta_h^\gamma u|^p\,dx \le c(\omega)|h|^{p\beta - p}$$

für alle $h < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$ und alle $\omega \Subset \Omega$ dann gilt $u \in \widetilde{L}^{\Theta,p}_{loc}(\Omega)$ für alle $\Theta \in (0,\beta)$.

[1] Dies sieht man wenn man ω durch $Q\omega$ ersetzt mit einer orthogonalen Matrix Q

Literaturverzeichnis

[Ad] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Pure Appl. Math. **65**, Academic Press, New York/ London (1975).

[AFP] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford (2000).

[Al] M. A. Al-Gwaiz. *Theory of Distributions*. Pure Appl. Math. **159**, Marcel Dekker Inc., New York (1992).

[Alt] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis — Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer–Lehrbuch. Zweite, verbesserte Auflage, Springer Verlag, Berlin et. al. (1992).

[Da] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Appl. Math. Sci. **78**, Springer Verlag, Berlin et. al. (1989).

[GMS] m. Giaquinta, g. Modica, j. Souček. *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I & II*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **37/38**, Springer–Verlag, Berlin (1998).

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundl. math. Wiss. **224**, Springer Verlag, Berlin et. al. (1977).

[HS] E. Hewitt, K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis — A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable*. Zweite, korrigierte Auflage, Springer Verlag, Berlin (1969).

[Yo] K. Yosida. *Functional Analysis*. Grundl. math. Wiss. **123**, Springer Verlag, Berlin (1965).

[Mo] C. B. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Grundl. math. Wiss. **130**, Springer Verlag, Berlin (1966).

[St] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1970).