Glatte Approximation

Marc Syväri

LMU München

Hüttenseminar WS 14/15

Glättender Kern

Eine C^∞-Funktion $\eta : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ mit

- $supp(\eta) \subset \overline{B_1(0)}$
- $\int_{\mathbb{R}^d} \eta \, dx = 1$

heißt glättender Kern (Mollifier).

Kanonische Mollifier:

$$\eta := \begin{cases} c \cdot exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{ansonten} \end{cases}$$

wobei $c \in (0, \infty)$, so dass $\int_{\mathbb{R}^d} \eta \, dx = 1$.

Glättung/Regularisierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ein glättender Kern auf $\mathbb{R}^d$. Die Faltung $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$:

$$u_\varepsilon := \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-z)u(z)\,dz = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-z)u(z)\,dx$$

heißt Glättung (oder Regularisierung) von u mit Radius $\varepsilon > 0$.

Dabei ist

- $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
- $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Glättungssatz

$\forall u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\forall \varepsilon > 0$ ist $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und u besitze eine γ-te schwache Ableitung, so gilt:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon = (\partial^\gamma u)_\varepsilon$$

Beweis:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(z)(\partial_x^\gamma \eta_\varepsilon)(x-z)\,dz$$

$$= (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u(z)(\partial_z^\gamma \eta_\varepsilon)(x-z)\,dz = \int_\Omega \partial_z^\gamma u(z)\eta_\varepsilon(x-z)\,dz = (\partial^\gamma u)_\varepsilon(x)$$

Glättungssatz

$\forall u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\forall \varepsilon > 0$ ist $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Sei $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ und u besitze eine γ-te schwache Ableitung, so gilt:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon = (\partial^\gamma u)_\varepsilon$$

Beweis:

$$\partial^\gamma u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(z)(\partial_x^\gamma \eta_\varepsilon)(x-z)\,dz$$

$$= (-1)^{|\gamma|} \int_\Omega u(z)(\partial_z^\gamma \eta_\varepsilon)(x-z)\,dz = \int_\Omega \partial_z^\gamma u(z)\eta_\varepsilon(x-z)\,dz = (\partial^\gamma u)_\varepsilon(x)$$

Normerhaltung beim Glätten 1

Seien $\omega \Subset \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist ω^ε die äußere Parallelmenge.

$$\omega^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d ; dist(x, \omega) < \varepsilon\}$$

Dann gilt:
$u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty] \Rightarrow u_\varepsilon \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit der Abschätzung

$$\|u_\varepsilon\|_{p;\omega} \leq \|u\|_{p;\omega^\varepsilon}$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug, dass $\omega^\varepsilon \Subset \Omega$ ist.

Beweis (1)

Sei $x \in \omega \Subset \Omega$ und $u \in L^p_{loc}(\Omega)$

- $p = \infty$

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \|u\|_{\infty;\omega^\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-z)\,dx = \|u\|_{\infty;\omega^\varepsilon}$$

- $p = 1$

$$\|u_\varepsilon\|_{1;\omega} \leq \int_\omega \int_{\omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-z)|u(z)|\,dzdx =$$

$$= \int_{\omega^\varepsilon} \left(\int_{\omega \bigcap B_\varepsilon(z)} \eta_\varepsilon(x-z)\,dx \right) |u(z)|\,dz \leq \int_{\omega^\varepsilon} |u(z)|\,dz$$

Beweis (2)

Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$. Für ein fixiertes $x \in \omega \Subset \Omega$ mit dem Maß $\mu_x : \wp(\Omega) \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\mu_x(A) := \int_A \eta_\varepsilon(x - z)\, dz$$

folgt mit der Hölder-Ungleichung:

$$\|u_\varepsilon\|_{p;\omega}^p = \int_\omega \left| \int_{\omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(x - z) u(z)\, dz \right|^p dx = \int_\omega \left| \int_{\omega^\varepsilon} 1 \cdot u(z)\, d\mu_x(z) \right|^p dx \leq$$

$$\leq \int_\omega \left(\int_{\omega^\varepsilon} |u|^p\, d\mu_x(z) \right) \mu_x(\omega^\varepsilon)^{p-1} dx = \int_\omega \left(\int_{\omega^\varepsilon} |u|^p \eta_\varepsilon(x - z)\, dz \right) dx$$

wobei $\mu_x(\omega^\varepsilon) = 1$ gilt. Der Rest folgt analog zu $p = 1$.

Normerhaltung beim Glätten 2

- Ist $u \in W^{p,k}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$, so ist $u_\varepsilon \in W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)$ und

$$\|u_\varepsilon\|_{k,p;\Omega_\varepsilon} \leq \|u\|_{k,p;\Omega}$$

- Ist $u \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $u_\varepsilon \in C^k(\Omega)$ und es gilt:

$$\|u_\varepsilon\|_{C^k(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u\|_{C^k(\Omega)}$$

Konvergenz beim Glätten 1

- Ist $u \in C^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\partial^\gamma u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u$$

  lokal gleichmäßig auf Ω für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$.
- Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit einem $1 \leq p < \infty$, so gilt:

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \; in \; L^p_{loc}(\Omega)$$

  Außerdem gilt für $p \in [1, \infty]$

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \; punktweise \; f.ü. \; in \; \Omega$$

Beweis

Sei $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$. Für fixiertes $\omega \Subset \omega_0 \Subset \Omega$ gibt es $\omega^\varepsilon \subset \omega_0$ mit $\varepsilon > 0$ klein genug. Dann gilt für $x \in \omega$:

$$|\partial^\gamma u_\varepsilon(x) - \partial^\gamma u(x)| = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-z)(\partial^\gamma u(z) - \partial^\gamma u(x))\, dz \right|$$

$$\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-z)\, |(\partial^\gamma u(z) - \partial^\gamma u(x))|\, dz \leq$$

$$\sup_{y,z \in \overline{\omega_0};|y-z|<\varepsilon} |\partial^\gamma u(y) - \partial^\gamma u(z)|$$

Da $\partial^\gamma u$ auf dem Kompaktum $\overline{\omega_0}$ gleichmäßig stetig, verschwindet das Supremum für $\varepsilon \searrow 0$.

Konvergenz beim Glätten 2

- Ist $u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, Ω beschränkt und sei $\bar{u}$ die Fortsetzung von u auf ganz $\mathbb{R}^d$, so gilt:

$$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \ in \ L^p(\Omega)$$

- Ist $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty)$, so gilt

$$u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \ in \ W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

Außerdem gilt für $p \in [1, \infty]$, $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$

$$\partial^\gamma u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u \ punktweise \ f.ü. \ in \ \Omega$$

Globale Approximation von Sobolev-Funktionen

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

- Zu jedem $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit
$$u_m \xrightarrow{m\to\infty} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$
- $C^\infty(\Omega) \bigcap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, d.h. zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \bigcap W^{k,p}(\Omega)$ mit
$$u_m \xrightarrow{m\to\infty} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega)$$

Beweis

- (ω_m) kompakte Ausschöpfung von Ω mit $\omega_m \Subset \omega_{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$.
- $f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f_m \equiv 1$ in $\overline{\omega_m}$ und $supp(f_m) \subset \omega_{m+1}$
- $\exists(\varepsilon_m) \subset (0, \infty)$ mit $\|u_{\varepsilon_m} - u\|_{k,p;\omega_m} \leq \frac{1}{m}$
- Betrachte $u_m := \begin{cases} f_m u_{\varepsilon_m} & \text{auf } \omega_{m+1} \\ 0 & \text{auf } \Omega \setminus \omega_{m+1} \end{cases}$
- Für fixiertes $\omega \Subset \Omega$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\omega \Subset \omega_{m_0}$, so dass $\forall m > m_0$ gilt:

$$\|u_m - u\|_{k,p;\omega} \leq \|u_m - u\|_{k,p;\omega_m} = \|u_{\varepsilon_m} - u\|_{k,p;\omega_m} \leq \frac{1}{m}$$

Satz von Meyers und Serrin

Betrachte nun die Vervollständigung $H^{k,p}(\Omega)$ von $C^\infty(\Omega)\bigcap W^{k,p}(\Omega)$:

- Nach Konstruktion ist $H^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum.
- $C^\infty(\Omega)\bigcap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$

$\Rightarrow H^{k,p}(\Omega)$ ist isometrisch isomorph zu $W^{k,p}(\Omega)$.
(Satz von Meyer-Serrin)

$$kurz: \;\; H = W$$

Beispiel

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in W^1(\Omega)$. Dann gilt:
Ist $\omega \subset \Omega$ ein Gebiet und ist $\nabla u = 0$ f.ü.in ω, so ist u f.ü. in ω konstant.

Beweis: Sei $B \Subset \omega$, $\varepsilon > 0$, so dass $B^\varepsilon \Subset \omega$. Dann gilt:

- $\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{B^\varepsilon} \eta_\varepsilon(z-x)\nabla u(z)\,dz = 0 \Rightarrow u_\varepsilon \equiv c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ *in* B^ε
  $\Rightarrow \int_B |c_\varepsilon - u|\,dx \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \qquad \Rightarrow c_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} ⨍_B u\,dz$
- $\int_B \left|u - ⨍_B u\,dz\right| dx \leq$
  $\int_B |u - c_\varepsilon|\,dx + \mathcal{L}^d(B)\left|c_\varepsilon - ⨍_B u\,dz\right| \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$

Verallgemeinerung von Bällen zum gesamten Gebiet ω durch Widerspruch