LMU München • Andreas Swoboda

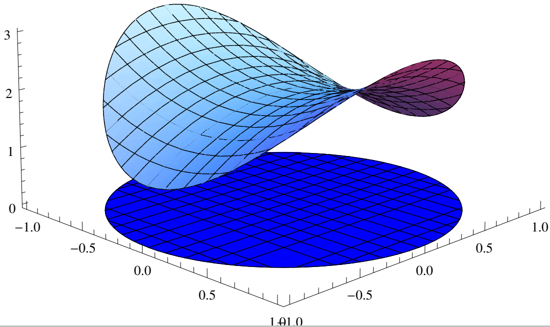
Maximumsprinzip im Finite-Elemente-Rahmen

Laplace-Gleichung: Maximumprinzip

Satz (Maximumprinzip für die Laplace-Gleichung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lösung der Laplace-Gleichung, d. h. $\Delta f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$. Dann gilt $\max f(\bar{\Omega}) = \max f(\partial\Omega)$ bzw. für alle $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$f(\mathbf{x}) \in [\min f(\partial\Omega), \max f(\partial\Omega)] \equiv \operatorname{conv}\operatorname{hull}(\partial\Omega)$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$$

Beweis

- Mittelwerteigenschaft: $f(\mathbf{x}) = \fint_{B(\mathbf{x},r)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$.
- Sei $\mathbf{x} \in \Omega$ sodass $f(\mathbf{x}) \notin [\min f(\partial\Omega), \max f(\partial\Omega)]$ globales Maximum (Minimum) ist, dann folgt aus der Mittelwerteigenschaft dass f konstant ist in $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$.
- Wiederholtes Anwenden liefert, dass f im gesamten zusammenhängenden Gebiet um $\mathbf{x}$ konstant ist, Widerspruch! ■

Convex Hull Property

- Verallgemeinerung auf nicht-homogenes Problem:
  $\Delta f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$ (Maximumprinzip)
- Verallgemeinerung auf weitere (z. B. elliptische o. nicht-lineare) PDG's, z. B. p-Laplace-Gleichung:

$$\begin{cases} \Delta_p f = 0 & \text{in } \Omega \\ f = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{p} |\nabla f|^p \to \min \text{ in } g + W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1)$$

  mit $\Delta_p f := \nabla \cdot \left(|\nabla f|^{p-2} \nabla f \right)$.
- Verallgemeinerung auf vektorwertige Lösungen: Convex Hull Property:

Satz (Convex Hull Property für die p-Laplace-Gleichung)

Sei f (vektorwertige) Lösung zu (1). *Dann gilt*

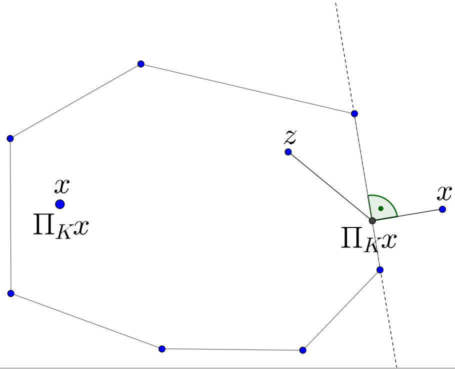
$$f(\mathbf{x}) \in \operatorname{conv\,hull}(f(\partial\Omega)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \qquad \text{(CHP)}$$

Warum die konvexe Hülle?

Lemma

*Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und **konvex**. Definiere die **orthogonale Projektion** $\Pi_K : \mathbb{R}^n \to K$ durch $\Pi_K \mathbf{x} := \arg\min_{\mathbf{y}\in K} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.*
Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\mathbf{z} \in K$ gilt

$$(\mathbf{x} - \Pi_K \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{z} - \Pi_K \mathbf{x}) \leq 0 \tag{2}$$



Warum die konvexe Hülle?

Lemma

Sei $K \in \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen, konvex und* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. *Dann gilt* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$:

$$|\nabla \Pi_K f(\mathbf{x})| \leq |\nabla f(\mathbf{x})|$$

$$\begin{aligned}
|\Pi_K f(\mathbf{x}) - \Pi_K f(\mathbf{y})|^2 = &(\Pi_K f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y}) - \Pi_K f(\mathbf{y})) \\
&\cdot (\Pi_K f(\mathbf{x}) - \Pi_K f(\mathbf{y})) \\
\leq &(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) \cdot (\Pi_K f(\mathbf{x}) - \Pi_K f(\mathbf{y})) \\
\overset{C-S}{\leq} &|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})||\Pi_K f(\mathbf{x}) - \Pi_K f(\mathbf{y})| \\
\Rightarrow \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \frac{|\Pi_K f(\mathbf{x}) - \Pi_K f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \leq &\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beweis: CHP für p-Laplace

- Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung (ohne Beweis)
- Wähle $K = \operatorname{conv\,hull}(\partial\Omega)$, dann gilt für $\mathcal{J}[f] \equiv \int \frac{1}{p}|\nabla f|^p$

$$\mathcal{J}[f] \leq \mathcal{J}[\Pi_K f]$$

- Wegen Monotonität von $\mathcal{J}[f]$ in $|\nabla f|$ und $|\nabla(\Pi_K f)| \leq |\nabla f|$:

$$\mathcal{J}[\Pi_K f] \leq \mathcal{J}[f]$$

$\Rightarrow \Pi_K f \equiv f \qquad \blacksquare$

Verallgemeinerung des CHP

Benutzt:

- Existenz und Eindeutigkeit der Lösung
- Monotonität von F in $\mathcal{J}[f] = \int_\Omega F(\mathbf{x}, |\nabla f(\mathbf{x})|)$ im zweiten Argument

Satz (Convex Hull Property)

Sei f eindeutiger Minimierer der Energie $\mathcal{J}[f] = \int_\Omega F(\mathbf{x}, |\nabla f(\mathbf{x})|)$ wie oben. Dann gilt

$$f(\mathbf{x}) \in \operatorname{conv}\operatorname{hull}(\partial\Omega), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Finite Elemente

Sei $\mathcal{T}$ eine **konforme Triangulierung** von Ω in n-Simplexe T.
Sei $\mathcal{N}$ die Menge der Ecken in $\mathcal{T}$.
Sei $\mathbb{P}_1(T)$ der Raum der **affin-linearen** Funktionen auf $T \in \mathcal{T}$.

Definition (Finite Lagrange Elemente)

Der Raum der finiten Lagrange Elemente ist definiert als

$$\mathbb{V}(\mathcal{T}) := \left\{ V \in C\left(\overline{\Omega}\right) \middle| \, V_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\}. \tag{4}$$

$\mathbb{V}(\mathcal{T})$ wird aufgespannt von der **nodalen Lagrange Basis** $\varphi_z, \ z \in \mathcal{N}$:

$$\text{für alle } y, z \in \mathcal{N} \text{ gilt } \varphi_z(y) = \delta_{yz} \quad \Rightarrow \quad \sum_{z \in \mathcal{N}} \varphi_z \equiv 1$$

Sei $\mathcal{T}$ eine **konforme Triangulierung** von Ω in n-Simplexe T.
Sei $\mathcal{N}$ die Menge der Ecken in $\mathcal{T}$.
Sei $\mathbb{P}_1(T)$ der Raum der **affin-linearen** Funktionen auf $T \in \mathcal{T}$.

Definition (Finite Lagrange Elemente)

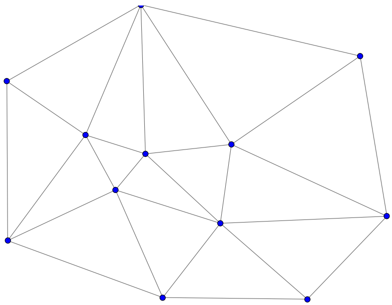
Der Raum der finiten Lagrange Elemente ist definiert als

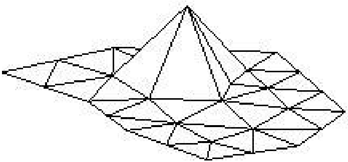
$$\mathbb{V}(\mathcal{T}) := \left\{ V \in C\left(\overline{\Omega}\right) \middle| \, V_{|T} \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T} \right\}. \tag{4}$$

$\mathbb{V}(\mathcal{T})$ wird aufgespannt von der **nodalen Lagrange Basis** $\varphi_z, \; z \in \mathcal{N}$:

$$\text{für alle } y, z \in \mathcal{N} \text{ gilt } \varphi_z(y) = \delta_{yz} \quad \Rightarrow \quad \sum_{z \in \mathcal{N}} \varphi_z \equiv 1$$

Triangulierung, nodale Basis

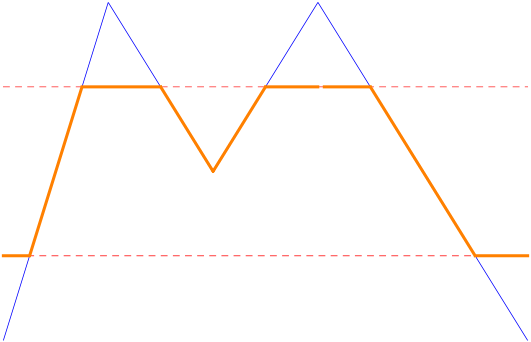




[1] http://www.cwscholz.net/projects/da/node18.html

CHP für finite Elemente

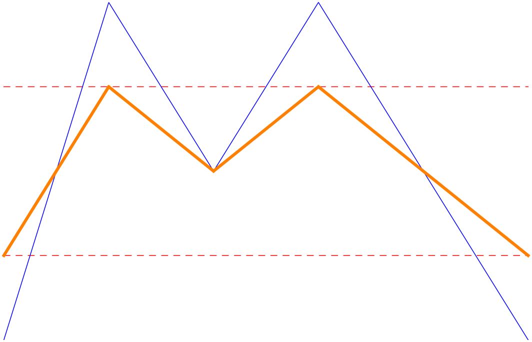
I. A. gilt für $\mathbf{V} \in \mathbb{V}^m(\mathcal{T})$, dass $\Pi_K \mathbf{V} \notin \mathbb{V}(\mathcal{T})$!



Definiere den **Projektionsoperator** $\mathcal{P}_K : \mathbb{V}(\mathcal{T})^m \to \mathbb{V}(\mathcal{T})^m$ mit $(\mathcal{P}_K \mathbf{V})(\Omega) \subset K$ durch

$$(\mathcal{P}_K \mathbf{V})(z) := \Pi_K \mathbf{V}(z), \ z \in \mathcal{N} \tag{5}$$

I. A. gilt für $\mathbf{V} \in \mathbb{V}^m(\mathcal{T})$, dass $\Pi_K \mathbf{V} \notin \mathbb{V}(\mathcal{T})$!



Definiere den **Projektionsoperator** $\mathcal{P}_K : \mathbb{V}(\mathcal{T})^m \to \mathbb{V}(\mathcal{T})^m$ mit $(\mathcal{P}_K \mathbf{V})(\Omega) \subset K$ durch

$$(\mathcal{P}_K \mathbf{V})(z) := \Pi_K \mathbf{V}(z), \; z \in \mathcal{N} \tag{5}$$

Nicht-Stumpfwinkligkeit

Definition (nicht-Stumpfwinkligkeit)

Ein **Simplex** $T \in \mathcal{T}$ heißt **nicht-stumpf** wenn die Winkel zwischen allen Paaren von Seiten kleiner oder gleich $\pi/2$ sind.
Eine **konforme Triangulierung** $\mathcal{T}$ von Ω heißt **nicht-stumpf**, wenn alle Simplexe $T \in \mathcal{T}$ nicht-stumpf sind.

Mit anderen Worten:

Lemma

Ein n-Simplex $T \in \mathcal{T}$ ist nicht-stumpf genau dann wenn

$$\nabla\varphi_{z|T} \cdot \nabla\varphi_{y|T} \leq 0 \quad \forall z, y \in T \cap \mathcal{N} \text{ mit } z \neq y \tag{6}$$

Eine konforme Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω ist nicht-stumpf genau dann wenn

$$\nabla\varphi_z \cdot \nabla\varphi_y \leq 0 \quad \text{fast überall in } \Omega, \quad \forall z, y \in \mathcal{N} \text{ mit } z \neq y \tag{7}$$

Nicht-Stumpfwinkligkeit

Definition (nicht-Stumpfwinkligkeit)

Ein **Simplex** $T \in \mathcal{T}$ heißt **nicht-stumpf** wenn die Winkel zwischen allen Paaren von Seiten kleiner oder gleich $\pi/2$ sind.
Eine **konforme Triangulierung** $\mathcal{T}$ von Ω heißt **nicht-stumpf**, wenn alle Simplexe $T \in \mathcal{T}$ nicht-stumpf sind.

Mit anderen Worten:

Lemma

Ein n-Simplex $T \in \mathcal{T}$ ist nicht-stumpf genau dann wenn

$$\nabla \varphi_{z|T} \cdot \nabla \varphi_{y|T} \leq 0 \quad \forall z, y \in T \cap \mathcal{N} \text{ mit } z \neq y \tag{6}$$

Eine konforme Triangulierung $\mathcal{T}$ von Ω ist nicht-stumpf genau dann wenn

$$\nabla \varphi_z \cdot \nabla \varphi_y \leq 0 \quad \text{fast überall in } \Omega, \quad \forall z, y \in \mathcal{N} \text{ mit } z \neq y \tag{7}$$

Lemma

Lemma

Sei $\mathcal{T}$ eine nicht-stumpfe, konforme Triangulierung von Ω und sei $K \in \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und konvex. Für alle $\mathbf{V} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})^m$ und fast überall in Ω gilt

$$\nabla \mathbf{V} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V} \geq |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}|^2 \text{ und} \tag{8}$$

$$|\nabla \mathbf{V}| \geq |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}|, \tag{9}$$

d.h. unter diesen Bedinungen gilt (CHP)

Beweis

- $\nabla \mathbf{V} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V} \geq |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}|^2$:

$$\mathbf{V}_{|T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(z_i)\varphi_{i|T} \quad \textit{mit} \ \{z_i\}_{i=1\ldots n} = \mathcal{N}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{V}_{|T} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}_{|T} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\nabla\varphi_{i|T} \cdot \nabla\varphi_{j|T}\right)\left(\mathbf{V}(z_i) \cdot \Pi_K \mathbf{V}(z_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\nabla\varphi_{i|T} \cdot \nabla\varphi_{j|T}\right) \mathbf{V}(z_i) \cdot \Big(\Pi_K \mathbf{V}(z_j) - \underbrace{\Pi_K \mathbf{V}(z_i)}_{\sum_j \to 0}\Big) \\
&\underset{\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \leq 0}{\overset{\textit{Lemma 1}}{\geq}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\nabla\varphi_{i|T} \cdot \nabla\varphi_{j|T}\right) \Pi_K \mathbf{V}(z_i) \cdot \Big(\Pi_K \mathbf{V}(z_j) - \underbrace{\Pi_K \mathbf{V}(z_i)}_{\sum_j \to 0}\Big) \\
&= \nabla\left(\mathcal{P}_K \mathbf{V}\right)_{|T} : \nabla\left(\mathcal{P}_K \mathbf{V}\right)_{|T} = \left|\nabla\left(\mathcal{P}_K \mathbf{V}\right)_{|T}\right|^2
\end{aligned}$$

- $|\nabla \mathbf{V}| \geq |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}|$: Cauchy-Schwarz: $|\nabla \mathbf{V}| \cdot |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}| \geq \nabla \mathbf{V} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}$

Beweis

- $\nabla \mathbf{V} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V} \geq |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}|^2$:

$$\mathbf{V}_{|T} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(z_i)\varphi_{i|T} \quad \textit{mit } \{z_i\}_{i=1\ldots n} = \mathcal{N}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{V}_{|T} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}_{|T} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\nabla\varphi_{i|T} \cdot \nabla\varphi_{j|T}\right)\left(\mathbf{V}(z_i) \cdot \Pi_K \mathbf{V}(z_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\nabla\varphi_{i|T} \cdot \nabla\varphi_{j|T}\right) \mathbf{V}(z_i) \cdot \Big(\Pi_K \mathbf{V}(z_j) - \underbrace{\Pi_K \mathbf{V}(z_i)}_{\sum_j \to 0}\Big) \\
&\underset{\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \leq 0}{\overset{\textit{Lemma 1}}{\geq}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\nabla\varphi_{i|T} \cdot \nabla\varphi_{j|T}\right) \Pi_K \mathbf{V}(z_i) \cdot \Big(\Pi_K \mathbf{V}(z_j) - \underbrace{\Pi_K \mathbf{V}(z_i)}_{\sum_j \to 0}\Big) \\
&= \nabla\left(\mathcal{P}_K \mathbf{V}\right)_{|T} : \nabla\left(\mathcal{P}_K \mathbf{V}\right)_{|T} = \left|\nabla\left(\mathcal{P}_K \mathbf{V}\right)_{|T}\right|^2
\end{aligned}$$

- $|\nabla \mathbf{V}| \geq |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}|$: Cauchy-Schwarz: $|\nabla \mathbf{V}| \cdot |\nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}| \geq \nabla \mathbf{V} : \nabla \mathcal{P}_K \mathbf{V}$

Satz

$$\mathcal{J}[\mathbf{V}] = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla \mathbf{V}|^p \to \min \quad \text{in } \mathbf{G} + \mathbb{V}_0(\mathcal{T})^m$$

Hat eine eindeutige Lösung.

- $\mathcal{J}$ ist durch 0 nach unten beschränkt und eine infimale Folge $\{\mathbf{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ durch $C > 0$ nach oben

  $\mathbb{V}(\mathcal{T})^m$ endlich-dimensional $\Rightarrow$ $\{\mathbf{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist präkompakt in $\mathbb{V}(\mathcal{T})^m$

  $\Rightarrow$ Es gibt $\mathbf{V}_{k_l} \to \mathbf{U} \in \mathbf{G} + \mathbb{V}_0(\mathcal{T})^m$, Minimierer
- Angenommen, es gibt mehrere Minimierer $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$, dann $\left|\frac{\nabla\mathbf{U}+\nabla\mathbf{V}}{2}\right|^p < \frac{|\nabla\mathbf{U}|^p}{2} + \frac{|\nabla\mathbf{V}|^p}{2}$ für $p > 1$

  $\Rightarrow$ $\mathcal{J}[\frac{\mathbf{U}+\mathbf{V}}{2}] < \frac{\mathcal{J}[\mathbf{U}]}{2} + \frac{\mathcal{J}[\mathbf{V}]}{2} = \mathcal{J}[\mathbf{U}]$, Widerspruch!

Existenz&Eindeutigkeit (p-Laplace FE)

Satz

$$\mathcal{J}[\mathbf{V}] = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla \mathbf{V}|^p \to \min \quad \text{in } \mathbf{G} + \mathbb{V}_0(\mathcal{T})^m$$

Hat eine eindeutige Lösung.

- $\mathcal{J}$ ist durch 0 nach unten beschränkt und eine infimale Folge $\{\mathbf{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ durch $C > 0$ nach oben

  $\mathbb{V}(\mathcal{T})^m$ endlich-dimensional $\Rightarrow$ $\{\mathbf{V}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist präkompakt in $\mathbb{V}(\mathcal{T})^m$

  $\Rightarrow$ Es gibt $\mathbf{V}_{k_l} \to \mathbf{U} \in \mathbf{G} + \mathbb{V}_0(\mathcal{T})^m$, Minimierer

- Angenommen, es gibt mehrere Minimierer $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$, dann
  $\left|\frac{\nabla\mathbf{U}+\nabla\mathbf{V}}{2}\right|^p < \frac{|\nabla\mathbf{U}|^p}{2} + \frac{|\nabla\mathbf{V}|^p}{2}$ für $p > 1$
  $\Rightarrow$ $\mathcal{J}[\frac{\mathbf{U}+\mathbf{V}}{2}] < \frac{\mathcal{J}[\mathbf{U}]}{2} + \frac{\mathcal{J}[\mathbf{V}]}{2} = \mathcal{J}[\mathbf{U}]$, Widerspruch!

Existenz&Eindeutigkeit (allgemein)

Satz

Sei das Funktional $\mathcal{J} : \mathbb{V}(\mathcal{T})^m \to \mathbb{R}$ *stetig und sei* $F : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$

(1) ***streng konvex*** *im zweiten Argument, d. h. für alle* $\theta \in (0,1)$ *und* $s, t \geq 0,\ s \neq t$ *gilt fast überall in* Ω

$$F\left(\cdot, \theta s + (1-\theta)t\right) < \theta F(\cdot, s) + (1-\theta) F(\cdot, t)$$

(2) ***koerzitiv****, d. h. es gibt eine stetige, monotone Funktion* $F : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ *mit* $g(t) \to \infty$ *für* $t \to \infty$*, sodass fast überall in* Ω *gilt:*

$$F(\cdot, t) \geq g(t) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann existiert ein ***eindeutiges*** $\mathbf{U} \in \mathbf{G} + \mathbb{V}_0(\mathcal{T})^m$ *sodass*

$$\mathcal{J}(\mathbf{U}) = \min\left\{\mathcal{J}(\mathbf{V}) : \mathbf{V} \in \mathbf{G} + \mathbb{V}_0(\mathcal{T})^m\right\}$$

Diskussion

"Ob ein Mensch klug ist, erkennt man an seinen Antworten.
Ob ein Mensch weise ist, erkennt man an seinen Fragen."
(Nagib Mahfuz)