LMU München • Nicole Seiffert

Fundamentallemma und Poincaré-Ungleichung

Hüttenseminar bei
Prof. Lars Diening
07.01.2015 - 10.01.2015

Notationen

(i) $\omega \Subset \Omega$
$\overline{\omega}$ ist kompakte Teilmenge von Ω.

(ii) $L^p_{loc}(\Omega)$
Menge der $\mathcal{L}^n$-f.ü. eindeutig definierten Funktionen $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $u \in L^p(\omega)$ für alle $\omega \Subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$

(iii) einfache Funktion
$u(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x), \alpha_k \geqslant 0$ mit $\mathcal{L}^n$-fast disjunkten, $\mathcal{L}$-messbaren Mengen $(A_k)_{k\in\{1,\dots,r\}}$ mit $\mathcal{L}^n(A_k) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{k=1}^{r} A_k$

(iv) $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid supp(u) = \overline{\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ kompakt}\}$

(v) Desweiteren gelte stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Hilfslemma und Hilfskorollar (ohne Beweis)

(I) Lemma

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion. Dann $\exists (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\eta_n \xrightarrow{n\to\infty} u \text{ in } L^p(\Omega) \text{ mit } p \in [1,\infty).$$

(II) Korollar

Sei $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ $p \in [1,\infty)$ mit $\eta_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^p(\Omega)$.
$\exists$ Teilfolge $(\eta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\eta_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \text{ für } \mu\text{-f.a. } x \in \Omega.$$

Satz

Sei $\int\limits_\Omega u(x)\eta(x)dx = 0$ *für* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *und alle* $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$

Dann ist $u(x) = 0$ *für* $\mathcal{L}^n$*-f.a.* $x \in \Omega$. *Ist dagegen*

$$\int\limits_\Omega u(x)\eta(x)dx \geq 0 \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega),\ \eta \geq 0,$$

so ist $u(x) \geq 0$ *für* $\mathcal{L}^n$*-f.a.* $x \in \Omega$.

Beweis

Es gelte für $u \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$$\int_\Omega u(x)\eta(x)dx = 0 \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

Sei $\omega \Subset \Omega$ beliebig. Betrachte

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \mathbb{1}_\omega(x)$$

Da f eine einfache Funktion ist, gilt nach dem Hilfslemma: $\exists$ Folge $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\eta_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{1}_\omega$$

Wähle o.B.d.A $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $0 \leq \eta_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Wähle gemäß dem Hilfskorollar eine Teilfolge $(\eta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\eta_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{1}_\omega(x)$$

punktweise für $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \Omega$.
Betrachte

$$|u(x)\eta_{n_k}(x)| \leq |u(x)|$$

und $u(x)$ ist integrierbar auf $\omega \Subset \Omega$. Mit $|u(x)|$ als Majorante folgt:

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega u(x)\eta_{n_k}(x)dx \overset{\text{dom. Konv.}}{=} \int\limits_\Omega \lim_{k\to\infty} u(x)\eta_{n_k}(x)dx =$$

$$\int\limits_\Omega u(x)\mathbb{1}_\omega(x)dx = \int\limits_\omega u(x)dx \qquad (1)$$

Wähle ein beliebiges $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Betrachte:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$$
$$\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$
$$\Omega^0 = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$$

$\mathcal{L}^n(\Omega^0) = 0$ (trivial). Sei $\omega \Subset \Omega^+$, $\mathcal{L}^n(\Omega^+) > 0$, insbesondere $\mathcal{L}^n(\omega) > 0$.
$\Rightarrow u > 0$ auf ω. Wegen (1) gilt $\mathcal{L}^n(\omega) = 0 \; \forall \omega \Subset \Omega^+$. Äquivalent $\forall \omega \Subset \Omega^-$.

Einschub: Eigenschaften eines Radon-Maßes $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$

(i) Jede Borel-Menge in Ω ist μ-messbar.

(ii) $\forall \omega \subset \Omega$ kompakt gilt:

$$\mu(\omega) < \infty$$

Jede μ-messbare Teilmenge $A \subset \Omega$ ist durch relativ kompakte Teilmengen approximierbar:

$$\mu(A) = \sup_{B \Subset A} \mu(B)$$

$\mathcal{L}$ ist ein Radon-Maß

$$\Rightarrow \mathcal{L}^n(\Omega^+) = \sup_{\omega \Subset \Omega^+} \mathcal{L}^n(\omega) = 0 = \sup_{\omega \Subset \Omega^-} \mathcal{L}^n(\omega) = \mathcal{L}^n(\Omega^-)$$

$\Rightarrow u(x) = 0$ für $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \Omega$.

Der zweite Fall des Lemmas folgt analog.

$\square$

Poincaré-Ungleichung (Version für $\mathring{H}^{1,p}(\Omega)$)

Definition

Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ besitzt die **schwache Ableitung** $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, wenn für alle Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\phi(x)dx = (-1)^\alpha \int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)dx$$

Definition

$p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist

$$H^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ existiert für } 0 \le |\alpha| \le k\}$$

der **Sobolevraum** mit k-facher Differenzierbarkeitsstufe. Bemerke:

$$\mathring{H}^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^k(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{k,p}(\Omega)}} \subset H^{k,p}(\Omega) \text{ und } (\mathring{H}^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{L^p}) \text{ ist Banach.}$$

Satz

Es gibt eine Konstante $c_p \le 2d$, so dass für alle $u \in \mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Beweis

Bemerkung:

$$\mathring{H}^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{1,p}(\Omega)}} \subset H^{1,p}(\Omega)$$

$\Rightarrow$ Es reicht, die Ungleichung für $u \in C_0^1(\Omega)$ zu zeigen.

Wähle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^1(\Omega)$, $v \in \mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ mit $\|v - u_k\|_{H^{1,p}(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und die Ungleichung sei für $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllt.

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \|u_k + v - u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^p(\Omega)} + \|v - u_k\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq c_p\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} + \|u_k - v\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq c_p\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + c_p\|\nabla(u_k - v)\|_{L^p(\Omega)} + \|v - u_k\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} c_p\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$$

Sei $u \in C_0^1(\Omega)$. $\Rightarrow u$ kann auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden durch:

$$\overline{u}(x) \begin{cases} u(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

Wähle o.B.d.A. $\Omega \subset [-d, d] \times \mathbb{R}^{n-1}$, $\overline{u} \in C^1(\mathbb{R})$. Für $x_1 \in [-d, d]$ gilt:

$$\overline{u}(x) \overset{\text{HDI}}{=} \int_{-d}^{x_1} \overline{u}(t, x_2, ..., x_n) dt$$

Seien $p, q \in [1, \infty)$ konjugiert zueinander ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

$$|u(x_1, ..., x_n)|^p \leq (\int_{-d}^{d} |1 \cdot \overline{u}_{x_1}(t, x_2, ..., x_n)| dt)^p$$

$$\overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} (\int_{-d}^{d} |\overline{u}_{x_1}(t, x_2, ..., x_n)|^p dt)^{\frac{p}{p}} \cdot (\int_{-d}^{d} 1^q dt)^{p/q}$$

$$\leq \int_{-d}^{d} |\overline{u}_{x_1}(t, x_2, ..., x_n)|^p dt \cdot (2d)^{\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \int_{-d}^{d} |\overline{u}(x_1, ...x_n)|^p dx_1 \leq (2d)^{\overset{= p}{\frac{p}{q}+1}} \int\limits_{-d}^{d} |\overline{u}_{x_1}(t, x_2, ..., x_n)|^p dt$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}(x)|^p dx \leq (2d)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}_{x_1}(x)|^p dx$$

Da $\overline{u}(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq 2d(\int\limits_{\Omega} |u_{x_1}(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \text{ für ein } c_p \leq 2d$$

$\square$

Poincaré-Ungleichung (für konv. beschr. Gebiete)

Satz

Für jedes konvex, beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Konstante $c_p \leq d(\Omega)^{n+1} \frac{\omega_n}{n|\Omega|}$, so dass für alle $u \in H^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u(x)dx = 0$$

und $p \in [1, \infty]$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Notation:
$d(\Omega) = \sup_{x,y \in \Omega} |x - y|$ *und* $|\Omega| = \mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$.
Ein Gebiet Ω ist konvex, wenn für alle $x, y \in \Omega$, $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$$

Hilfssätze (ohne Beweis)

(I) Hilfssatz

Zu jedem konvexen, beschränkten Gebiet Ω gibt es eine Konstante $c_p \leq d(\Omega)^{n+1} \frac{\omega_n}{n|\Omega|}$, so dass für alle $u \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u(x)dx = 0$$

und $p \in [1, \infty]$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

(II) Hilfssatz

$H^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ liegt dicht in $H^{1,p}(\Omega)$

Hilfssatz (I) Beweisskizze

Durch HDI, Kettenregel, Substitutionen kann man zeigen:

$$|u(x)| \leq \frac{d(\Omega)^n}{n|\Omega|} \int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|}{|t-x|^{n-1}} dt \qquad \text{für ein } x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \|u(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{d(\Omega)^n}{n|\Omega|} \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|}{|t-x|^{n-1}} dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(i) $1 < p < \infty$

$$\int_\Omega \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u(t)|}{|t-x|^{n-1}} dt \Big)^p dx \overset{\text{Hölder-Ungl.}}{\leq} \int_\Omega \left(|\nabla u(t)|^p |t-x|^{1-n} dt \right) \Big(\int_\Omega |t-x|^{1-n} dt \Big) dx$$

$$\leq (d(\Omega)|S^{n-1}|)^{p-1} \int_\Omega \int_\Omega |\nabla u(t)|^p |t-x|^{1-n} dt dx \leq (d(\Omega)|S^{n-1}|)^p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

(ii) $p = \infty$ folgt aus $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{n \to \infty} \|\nabla u\|_\infty$

(iii) $p = 1$ folgt aus Fubini und

$$\int_\Omega |\nabla u(t)| \left(\int_\Omega |t-x|^{1-n} dx \right) dt \leq d(\Omega)|S^{n-1}| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

Beweis (Poincaré-Ungleichung)

Die Aussage gilt bereits wegen dem 1. Hilfssatz für $u \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ Nachdem $H^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ dichte Teilmenge von $H^{1,p}(\Omega)$ ist, konstruieren wir für ein beliebiges $u \in H^{1,p}(\Omega)$ wie im Beweis der Poincaré-Ungleichung für $\mathring{H}^{1,p}(\Omega)$ eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\|u - u_k\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Die Beweisführung ist nun analog zu der in der vorherigen Version der Poincaré-Ungleichung.

$\square$