Ritz-Galerkin-Verfahren
Courant Element

Moritz Scherrmann

LMU München

Zillertal am 09.01.2015

Erinnerung

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, $f \in C^0(\overline{G})$ und $X = \overset{\circ}{H}^1(G)$. Die Lösung u der Poissongleichung zu Nullrandwerten finden wir durch das Minimieren des Funktionals

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_G \langle \nabla v, \nabla v \rangle - f(v)$$

über X. Sei

$$I(u) = \inf_{v \in X} I(v).$$

$\Rightarrow$ u ist schwache Lösung

Ritz-Galerkin-Verfahren

Idee:
Wähle endlichdimensionalen Teilraum $X_h \subset X$. Löse das Variationsproblem, ein $u_h \in X_h$ zu finden, so dass

$$I(u_h) = \inf_{v_h \in X_h} I(v_h).$$

Offensichtlich gilt $I(u) \leq I(u_h)$.

Abbildung: Boris Grigorjewitsch Galjorkin

Ritz-Galerkin-Verfahren

Sei $f \in H^{-1}(G)$. Nun gilt:
$u_h \in X_h$ ist die eindeutige diskrete Lösung, sodass
$I(u_h) = \inf_{v_h \in X_h} I(v_h)$ gilt, und

$$\int_G \langle \nabla u_h, \nabla \varphi_h \rangle = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \qquad (1)$$

Beweis:
Analog zu Beweis in "Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen". $\square$

Ritz-Galerkin-Verfahren

Nun ist aber

$$\int_G \langle \nabla u_h, \nabla \varphi_h \rangle = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h$$

ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $u_h \in X_h$!
Da X_h endlich dimensional ist, wissen wir:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \exists \psi_1, ..., \psi_N \in X_n : X_n = span\,\{\psi_1, ..., \psi_N\}$$

$$\Rightarrow u_h(x) = \textstyle\sum_{j=1}^N u_j \psi_j(x), \quad x \in G.$$

Sei $\underline{u} = (u_1, ..., u_N)$.

Ritz-Galerkin-Verfahren

$$(1) \Leftrightarrow \int_G \langle \nabla u_h, \nabla \psi_i \rangle = f(\psi_i) \qquad (i = 1, ..., N)$$

Stelle u_h als Linearkombination der Basisfunktionen dar:

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_G \langle \nabla \psi_j, \nabla \psi_i \rangle = f(\psi_i) \qquad (i = 1, ..., N)$$

Definiere Steifigkeitsmatrix:

$$S_{ij} = \int_G \langle \nabla \psi_j, \nabla \psi_i \rangle \qquad (i, j = 1, ..., N)$$

und $\underline{f} = (f_1, ..., f_N)$, $f_i = f(\psi_i)$ $(i = 1, .., N)$, so folgt:

$$(1) \;\Leftrightarrow\; S\underline{u} = \underline{f}$$

Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix S ist symmetrisch und positiv definit.

Beweis:
Symmetrie ist klar. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Setze $v_h(x) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \psi_j(x)$ und wir erhalten

$$\langle S\xi, \xi\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} S_{ij}\xi_j\xi_i = \int_G |\nabla v_h|^2 \geqslant \frac{1}{c_p^2} \int_G v_h^2.$$

Offensichtlich ist der letzte Ausdruck nicht negativ und gleich Null genau dann, wenn $v_h = 0$ ist.
$\Rightarrow \xi = 0$
$\Rightarrow$ S ist positiv definit. $\square$

Ergebnis

$$S := \begin{pmatrix} \int_G \langle \nabla\psi_1, \nabla\psi_1 \rangle & \dots & \int_G \langle \nabla\psi_1, \nabla\psi_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_G \langle \nabla\psi_N, \nabla\psi_1 \rangle & \dots & \int_G \langle \nabla\psi_N, \nabla\psi_N \rangle \end{pmatrix}$$

S positiv definit $\Rightarrow$ S invertierbar

$$\Rightarrow \quad S\underline{u} = \underline{f} \;\Leftrightarrow\; \underline{u} = S^{-1}\underline{f}$$

Lemma von Céa

Sei $f \in H^{-1}(G)$ und $X_h \subset \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Ist $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ die kontinuierliche und $u_h \in X_h$ die diskrete Lösung des Variationsproblems, so gilt:

$$||\nabla(u - u_h)||_{L^2(G)} = \inf_{\varphi_h \in X_h} ||\nabla(u - \varphi_h)||_{L^2(G)}.$$

Beweis:

Wir wissen: Für $u_h \in X_h$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ gilt :

$$\int_G \langle \nabla u_h, \nabla \varphi_h \rangle = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h \qquad (1)$$

$$\int_G \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(G) \qquad (2)$$

Fortführung des Beweises

Setze $\varphi_h \in X_h$ in (2) ein. Die Differenz davon mit (1) ergibt:

$$\int_G \langle \nabla(u - u_h), \nabla\varphi_h \rangle = 0 \quad \forall \varphi_h \in X_h$$

Nun folgt weiter für jedes $\varphi_h \in X_h$:

$$||\nabla(u - u_h)||^2_{L^2(G)} = \int_G \langle \nabla(u - u_h), \nabla u \rangle - \int_G \langle \nabla(u - u_h), \nabla u_h \rangle$$

$$= \int_G \langle \nabla(u - u_h), \nabla(u - \varphi_h) \rangle \leqslant ||\nabla(u - u_h)||_{L^2(G)} ||\nabla(u - \varphi_h)||_{L^2(G)}$$

Daraus folgt schließlich:

$$||\nabla(u - u_h)||_{L^2(G)} \leqslant ||\nabla(u - \varphi_h)||_{L^2(G)} \quad \forall \varphi_h \in X_h \quad \square$$

Vorbereitungen zum Courant Element

Baryzentrische Koordinaten:

Sei T ein s-dimensionales Simplex mit den Eckpunkten $a_0, ..., a_s$. Als baryzentrische Koordinaten $\lambda_0, .., \lambda_s$ eines Punktes $x \in T$ bezeichnet man die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=0}^{s} \lambda_j a_j = x, \quad \sum_{j=0}^{s} \lambda_j = 1$$

Raum der $k-$dimensionalen Polynome:

Es sei der Raum der Polynome mit Grad kleiner oder gleich $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch:

$$P_k = \left\{ p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \middle| p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha x^\alpha \ , c_\alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vorbereitungen zum Courant Element

Wir wissen: $x_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ji}\lambda_j$, $x_i = x_i(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, also gilt:

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{k} c_\alpha \prod_{i=1}^{n} (\sum_{j=0}^{n} a_{ji}\lambda_j)^{\alpha_i} \ \forall p \in P_k.$$

$1 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \Rightarrow p$ ist Polynom vom Grad k ohne konstanten Term in den $n+1$ Variablen $\lambda_0, ..., \lambda_n$:

$$p(x(\lambda)) = \overline{p}(\lambda) = \sum_{|\beta|=1}^{k} d_\beta \lambda^\beta$$

Lineares Element(Courant Element)

1.Sei T ein n-dimensionales Simplex. Dann ist durch Vorgabe von $p(a_j)$ für $j = 1, .., n$ ein $p \in P_1(T)$ eindeutig bestimmt. Für jedes $p \in P_1(T)$ hat man die Darstellung

$$p(x) = \overline{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} p(a_j)\lambda_j.$$

2. Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ zulässig trianguliert und sind $\overline{a}_j$ $(j = 1, .., \overline{m})$ die Ecken der Triangulierung $\mathcal{T}$, so ist durch Vorgabe von $u_h(\overline{a_j})$ $(j = 1, .., \overline{m})$ eindeutig eine Funktion $u_h \in X_h$,

$$X_h = \left\{ u_h \in C^0(\overline{G}) \middle| u_h|_T \in P_1(T), T \in \mathcal{T} \right\} \subset H^1(G),$$

bestimmt.

Lineares Element(Courant Element)

3.Eine Basis von X_h ist durch die Funktionen

$$\psi_j \in X_h, \quad \psi_j(\overline{a}_k) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, ..., \overline{m})$$

gegeben. Diese Basis nennt man Knotenbasis.

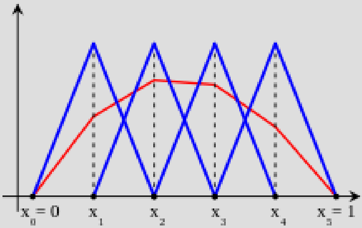

Abbildung: Basisfunktionen(blau) und eine Linearkombination(rot)

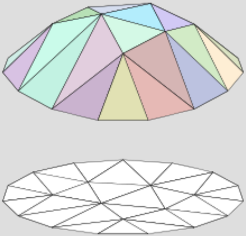

Abbildung: Eine stückweise lineare Funktion in zwei Dimensionen

Beweis

Es gilt:

$$\overline{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} d_j \lambda_j = p(x(\lambda)), da\ |\beta| = 1.$$

Sei $\{e_0, ..., e_n\}$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$.
Dann gilt:
$x(e_k) = a_k \ (k = 0, ..., n)$.

$$\Rightarrow p(a_k) = p(x(e_k)) = \overline{p}(e_k) = \sum_{j=0}^{n} d_j \delta_{jk} = d_k$$

Seien $T_1,\ T_2 \in \mathcal{T}$, $T_1 \cap T_2 = S$ (S ist $(n-k)$-dimensionaler Seitensimplex)
$\Rightarrow u_h|S \in P_1(S)$ durch die Werte in den Ecken von S eindeutig bestimmt.
$\Rightarrow X_h \subset H^1(G)$