Newest vertex bisection

Simon Meier

LMU München

19. Dezember 2014

Allgemeine Definitionen

- $\Omega \in \mathbb{R}^2$ polygones Gebiet
- P eine Zerlegung von Ω in Dreiecke $\triangle$
  Also $\Omega = \bigcup_{\triangle \in P} \triangle$, wobei für $\triangle, \triangle' \in P$ gilt: $\text{meas}(\triangle \cap \triangle') = 0$

Definition

- ε_P bezeichne die Menge der Kanten von P und $\dot{\varepsilon}_P$ die Menge der inneren Kanten
- $\mathcal{V}_P$ sei die Menge aller Knoten v von P, sowie $\dot{\mathcal{V}}_P$ die Menge der inneren Knoten

Bedingungen an P

1. Minimal angle condition
   $\forall \triangle \in P$ sind ihre jeweiligen Winkel $\geq a_0$ für ein positives a_0
2. Konformität
   Der Schnitt zweier Dreiecke ist entweder leer, eine gemeinsame Kante oder ein gemeinsame Knoten

Definition

Zerlegungen, welche 1) und 2) erfüllen, werden zulässig genannt

Markierung

Lemma

Für eine beliebige Anfangszerlegung P_0 gibt es eine Beschriftung der Kanten in P_0, sodass jeder Kante eine 0 *oder* 1 *zugewiesen wird und wenn auch immer $\triangle \in P_0$, erhalten genau zwei der Kanten eine* 1 *und die andere Kante eine* 0*.*

Definition

$\mathcal{M}_k$ ist die Menge der markierten Zellen

Beiweisidee

- Betrachte Triangulierung P einer Kugeloberfläche in $\mathbb{R}^3$
- Betrachte dualen Graph vom Abschluss P' von P
- Nach Satz von Petersen existiert perfektes Matching
- Jeder Kante in P', die mit einer Kante in ε korrespondiert, wird die Markierung 0 zugewiesen

Corollary

Nach Petersen's Theorem gilt für jedes Dreieck $\triangle \in P'$, dass genau eine der Kanten von $\triangle$ eine 0 bekommt und die anderen beiden 1

Regel zur Markierung

Definition

Die Generation eines Dreiecks $g(\triangle)$ ist die Anzahl der Vorfahren

1. Jedes Dreieck hat Seiten mit Markierungen $(i+1, i+1, i)$, wobei $i = g(\triangle)$
2. Neuester Knoten liegt gegenüber der Seite mit niedrigster Markierung

Teilungsprozess

- P_0 Anfangszerlegung von Ω
- Jedem $\triangle \in P_0$ wird nun genau ein Knoten $v(\triangle)$ als neuester Knoten für dieses Dreieck zugewiesen
- Kante gegenüber von $v(\triangle)$, wird mit $E(\triangle)$ bezeichnet
- $v(\triangle)$ wird mit Mittelpunkt von $E(\triangle)$ verbunden

Die bei der Teilung von $\triangle$ entstanden Dreiecke sind die Kinder von $\triangle$
$\triangle$ ist der Elternteil

Problem: Es entstehen hängende Knoten!

Komplettierung

1. Nach Teilung von P_i entsteht P'_{i+1} (nicht unbedingt zulässig)
2. Jedem $\triangle \in P_i$ wird $F(\triangle) \in P_i$ zugewiesen:
   i) Ist $E(\triangle)$ Randkante $\Rightarrow F(\triangle) = \emptyset$
   ii) Andernfalls gibt es eindeutiges $\triangle' \neq \triangle$, das $E(\triangle)$ als Kante hat
   Dann $F(\triangle) = \triangle'$
3. Führe Teilungen bei $\triangle'$ durch, dadurch erhält man P'_{i+1}
   - trifft 2i) für alle $\triangle \in P_i$ zu $\rightarrow P'_{i+1}$ zu P_{i+1} komplettiert
   - trifft 2ii) zu, springe zu 1)

Frage: Wie lässt der Prozess der Komplettierung $\sharp(P_n)$ steigen?

Theorem

Theorem

Sei $P_0, \ldots, P_n$ eine Folge von Zerlegungen. Dann gibt es eine Konstante C_2, welche nur von P_0 abhängt, mit:

$$\sharp(P_n) \leq \sharp(P_0) + C_2(\sharp(M_0 + \ldots + \sharp(M_{n-1}))$$

Dies kann umformuliert werden in

$$\sharp(P_n) \leq \sharp(P_0) + C_2 \sum_{k=1}^{n} m(P_k|P_{k-1}) \quad (2.15)$$

wodurch man eine weitere Schranke erhält.

Theorem

Sei P eine zulässige Zerlegung und $\bar{P}$ die Verfeinerung von P. Dann gibt es einen zulässigen Abschluss P' von $\bar{P}$ der $\bar{P}$ verfeinert und es gilt:

$$\begin{aligned} \sharp(P') &\leq \sharp(P_0) + C_2(m(P|P_0) + m(\bar{P}|P)) \\ &\leq \sharp(P_0) + C_2(\sharp(\bar{P}) - \sharp(P_0)) \leq C_2 \sharp(\bar{P}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Beweis (2.16)

Jedes Dreieck in $M_0, \dots M_{m-1}$ wurde im Schritt von P nach $\bar{P}$ geteilt.

Es gilt: $\sum_{k=0}^{m-1} \sharp\mathcal{M}_k = m(\bar{P}|P) \leq \sharp(\bar{P}) - \sharp(P)$

Somit $m(P|P_0) \leq \sharp(P) - \sharp(P_0)$

Nutzt man dies in (2.15) erhält man (2.16)

$\square$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!