# Scott-Zhang-Projektion

Maximilian Jung

LMU München

# Definitionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge mit polygonalem Rand $\partial\Omega$.
Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $\Omega$ mit maximaler Netzweite:

$$h := max_{T \in \mathcal{T}}\{h_T\} \text{ wobei } h_T := diam(T)$$

Sei $V_{\mathcal{T}}$ der Raum der bzl. $\mathcal{T}$ stückweisen Polynome.

$$V_{\mathcal{T}} := \{v \in \mathcal{C}(\Omega) | \forall T \in \mathcal{T} v|_T \in \mathcal{P}_r^d\}$$

Seien $(a_i)_{i=1,\dots,N}$ die Stützstellen des Lagrange-Gitters $r$-ter Ordnung bzl. $\mathcal{T}$.
Sei $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ die Nodale Basis von $V_{\mathcal{T}}$ d.h. für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$ gilt:

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$$

# Motivation

Wir Suchen einen Projektions Operator $\Pi : W^{l,p}(\Omega) \to V_{\mathcal{T}}$ der Form:

$$\Pi : v \mapsto \sum_{i=1}^{N} \omega_i(v)\varphi_i \text{ mit } \omega_i(v) \in \mathbb{R}$$

Mit der Eigenschaft:

$$v \in W_0^{l,p} \Rightarrow \Pi v|_{\partial\Omega} = 0$$

Probleme:

Funktionen in $W^{l,p}(\Omega)$ haben keine Punktwerte.

$\partial\Omega$ ist eine Nullmenge d.h. $\lambda_d(\partial\Omega) = 0$

## Berechnung der Gewichte $\omega_i$

Für jede Stüzstelle $a_i$ wählen wir einen Simplex $\sigma_i$:

- falls $a_i$ innerer Punkt eines $d$-Simplexes $T \in \mathcal{T}$ ist dann: $\sigma_i := T$
- falls $a_i$ innerer Punkt eines $d-1$-Simplexes $T'$ (Kante von $T$) ist dann: $\sigma_i := T'$
- falls $a_i$ in einem $d-2$-Simplex liegt d.h. ein Eckpunkt ist, dann:
  - falls $a_i \in \partial\Omega$, dann: $\sigma_i := T'$ mit $a_i \in T'$ und $T' \subset \partial\Omega$.
  - sonst: $\sigma_i := T'$ mit $a_i \in T'$.

Wir setzten $d_i := dim(\sigma_i) \in \{d, d-1\}$

Bem: Die Wahl der $\sigma_i$ ist nicht eindeutig.

Die zusätzliche Bedingung bei $a_i \in \partial\Omega$ ist elementar für das erhalten des Randverhaltens von $v$.

# Berechnung der Gewichte $\omega_i$

Wir fixieren nun ein $\sigma_i$ und berechnen das Gewicht $\omega_i(v)$.
Sei $(\varphi_{i_j})_{j=1,\dots,n_i}$ die nodale Basis für $\mathcal{P}_r^d(\sigma_i)$ d.h. die $\varphi_{i_j}$ mit $a_{i_j} \in \sigma_i$.

N: Wir wählen die $i_j$ so, dass $i_1 = i$.

Seien $(\psi_j^i)_{j=1,\dots,n_i}$ die Representanten der zu $(\varphi_{i_j})_{j=1,\dots,n_i}$ bzl. $<,>_{L^2(\sigma_i)}$ dualen Basis.
Die Idee ist nun $\omega_i(v)$ als $L^2$-Skalarprodukt von $v$ mit $\psi_1^i$ zu definieren.

- Falls $d_i = d$ ist das problemlos möglich.
- Falls $d_i = d - 1$ existiert ein $U \subset \Omega$ offen mit $C^1$ Rand und $\sigma_i \subset \partial U$. Und nach dem Spursatz existiert ein $C$ mit:

$$\|v|_{\partial U}\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|v|_U|_{W^{1,p}(U)}$$

Damit ist für $p \geq 1$ der folgende Term wohldefiniert:

$$\omega_i(v) :=< \psi_1^i, v|_{\sigma_i} >_{L^2(\sigma_i)} = \int_{\sigma_i} \psi_1^i v|_{\sigma_i} d\lambda_i$$

Wobei $\lambda_i$ entweder das Lebesgue Maß auf $T$ oder das Oberflächenmaß auf $\partial U$ ist mit $\sigma_i \subset \partial U$.

- Für alle $p \in V_{\mathcal{T}}$ und alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ gilt: $\omega_i(p) = p(a_i)$ und damit:

$$\Pi p(a_j) = \sum_{i=1}^{N} p(a_i)\varphi_i(a_j) = p(a_j)$$

- Für alle $v \in W_0^{l,p}$ und alle $a_i \in \partial\Omega$ gilt: $v|_{\sigma_i} = 0$, da nach Wahl $\sigma_i \subset \partial\Omega$. Und somit gilt $\omega_i(v) = 0$:

$$\Pi v|_{\partial\Omega} = 0$$

N: Wir schreiben $a \lesssim b$, wenn $a \leq Cb$ für eine von $v$ und $\mathcal{T}$ unabhängige Konstante $C$ gilt.

**Theorem**

*Für $v \in W^{l,p}(\Omega)$ mit $l \leq r+1$ gilt:*

$$\left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \|v - \Pi v\|^p_{W^{m,p}(T)} \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim h^{l-m} \|v\|_{W^{l,p}(\Omega)}$$

Zum Beispiel gilt für $p = 2$, $l = 1$, $m = 0$:

$$\|v - \Pi v\|_{L^2(\Omega)} = \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \|v - \Pi v\|^2_{L^2(T)} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{1}{h} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

# Beweis des Theorems

N: Sei $T_0$ der $d$-dimensionale Einheitssimplex.

- Für alle $T \in \mathcal{T}$ existiert eine eindeutig bestimmte affine Abbildung $T_0 \to T$:

$$F_T : x \mapsto Ax + b \text{ mit}$$

$$det(A) \lesssim h_T^d \text{ und } \|A\| \lesssim h_T$$

- Wenn $\sigma_i = T$ für ein $T \in \mathcal{T}$, dann gilt nach dem Transformationssatz:

$$\int_{T_0} (\psi_1^i \circ F_{\sigma_i}) \underbrace{(\varphi_{i_j} \circ F_{\sigma_i})}_{=\varphi_j^0} det(A) d\lambda_i = \delta_{1,j}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der dualen Basis folgt damit:

$$\|\psi_1^i\|_{L^\infty(\sigma_i)} = det(A)^{-1}\|\psi_1^0\|_{L^\infty(T_0)} \lesssim h_T^{-d}$$

- Analog gilt für $\sigma_i \subset \partial_k T$:

$$\|\psi_1^i\|_{L^\infty(\sigma_i)} \lesssim h_T^{-(d-1)}$$

**Satz (3.29 aus Dziuk)**

*Für $v \in W_{k,p}(\Omega)$ sowie $F_T$ und $A$ wie oben.*

$$|v \circ F_T|_{W^{k,p}(T_0)} \lesssim \|A\|^k |det(A)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{W^{k,p}(T)}$$

- Für alle $T$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{L^1(T)} &\lesssim |det(A)| \|v \circ F_T\|_{L^1(T_0)} \\
&\lesssim h_T^d \sum_{k=0}^{l} |v \circ F_T|_{W^{k,p}(T_0)} \\
&\lesssim h_T^d \sum_{k=0}^{l} \|A\|^k |det(A)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{W^{k,p}(T)} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{l} h_T^{d+k-\frac{d}{p}} |v|_{W^{k,p}(T)}
\end{aligned}
$$

- Für $\sigma_i \subset \partial T$ gilt:

$$
\|v\|_{L^1(T)} \lesssim \sum_{k=0}^{l} h_T^{d-1+k-\frac{d}{p}} |v|_{W^{k,p}(T)}
$$

- Für alle $v \in W^{l,p}(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|\Pi v\|_{W^{m,p}(T)} &\lesssim \sum_{i=1}^{n_1} |\omega_i| \|\varphi_i\|_{W^{m,p}(T)} \\
&\lesssim h_T^{-m+\frac{d}{p}} \max \|\varphi_i \circ F_T\|_{W^{m,p}(T_0)} \sum_{i=1}^{n_1} \|\psi_1^i v|_{\sigma_i}\|_{L^1(\sigma_i)} \\
&\lesssim h_T^{-m+\frac{d}{p}} \sum_{i=0}^{n_1} \|\psi_1^i\|_{L^\infty(\sigma_i)} \|v|_{\sigma_i}\|_{L^1(\sigma_i)} \\
&\lesssim \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=0}^{l} h_T^{-m+\frac{d}{p}-d_i+d_i+k-\frac{d}{p}} |v|_{W^{k,p}(T)} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{l} h_T^{k-m} |v|_{W^{k,p}(T)}
\end{aligned}$$

## Lemma (von Bramble-Hilbert)

*Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt mit $C^1$ Rand und Durchmesser $\rho$, dann existiert für alle $v \in W^{l,p}(U)$ ein $p \in \mathcal{P}^d_{l-1}(U)$ mit:*

$$\|v - p\|_{W^{k,p}(U)} \lesssim \rho^{l-k} \|v\|_{W^{l,p}(U)}$$

- damit gilt:

$$\begin{aligned} \|v - \Pi v\|_{W^{m,p}(T)} &\lesssim \|v - p\|_{W^{m,p}(T)} + \|\Pi(p - v)\|_{W_{m,p}(T)} \\ &\lesssim \|v - p\|_{W^{m,p}(T)} + \sum_{k=0}^{l} h_T^{k-m} \|p - v\|_{W^{k,p}}(T) \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{l} h_T^{k-m+l-k} \|v\|_{W^{k,p}(U_T)} \end{aligned}$$

- also haben wir:

$$\|v - \Pi v\|_{W^{m,p}(T)} \lesssim h_T^{l-m} \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

- Es folgt:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \|v - \Pi v\|^p_{W^{l,p}(T)} \lesssim h^{p(l-m)} \|v\|^p_{W^{k,p}(\Omega)}$$