Konvergenz der diskreten Lösungen und Fehlerabschätzung

Michael de Mourgues

LMU München

Bruck am Ziller, 08.01.2015

Das Problem und dessen Diskretisierung

Poissongleichung: $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G bzw.
$Tu = b$ mit $Tu = (-\Delta u, u|_{\partial G})$, $b = (f, g)$

Das Problem und dessen Diskretisierung

Poissongleichung: $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G bzw.
$Tu = b$ mit $Tu = (-\Delta u, u|_{\partial G})$, $b = (f, g)$

Diskretisierung: ordne $Tu_h = b_h$ zu, löse nach u_h.

Ziel: $||u - u_h||_X \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$X \xrightarrow{T} Y$$

$$X_h \xrightarrow{T_h} Y_h$$

Das Problem und dessen Diskretisierung

Poissongleichung: $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G bzw.
$Tu = b$ mit $Tu = (-\Delta u, u|_{\partial G})$, $b = (f, g)$

Diskretisierung: ordne $Tu_h = b_h$ zu, löse nach u_h.

Ziel: $||u - u_h||_X \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & Y \arrow[d, "D_h^Y"] \\ X_h \arrow[r, "T_h"] & Y_h \end{tikzcd}$$

Das Problem und dessen Diskretisierung

Poissongleichung: $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G bzw.
$Tu = b$ mit $Tu = (-\Delta u, u|_{\partial G})$, $b = (f, g)$

Diskretisierung: ordne $Tu_h = b_h$ zu, löse nach u_h.

Ziel: $||u - u_h||_X \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & Y \arrow[d, "D_h^Y"] \\ X_h \arrow[r, "T_h"] & Y_h \end{tikzcd}$$

Verfahren: Differenzenverfahren, Ritz-Galerkin-Verfahren, ...

Das Problem und dessen Diskretisierung

Poissongleichung: $-\Delta u = f$ in G, $u = g$ auf ∂G bzw.
$Tu = b$ mit $Tu = (-\Delta u, u|_{\partial G})$, $b = (f, g)$

Diskretisierung: ordne $Tu_h = b_h$ zu, löse nach u_h.

Ziel: $||u - u_h||_X \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] & Y \arrow[d, "D_h^Y"] \\ X_h \arrow[r, "T_h"] & Y_h \end{tikzcd}$$

Verfahren: Differenzenverfahren, **Ritz-Galerkin-Verfahren**, ...

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Kontinuierliches Problem: Lösung u der Poissongleichung minimiert I mit
$I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in \mathring{H}^1$

$$\mathring{H}^1(G) \xrightarrow{-\Delta} H^{-1}(G)$$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Kontinuierliches Problem: Lösung u der Poissongleichung minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in \mathring{H}^1$

- $I(u) = \inf_{v \in \mathring{H}^1} I(v) \Rightarrow \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$

$$\mathring{H}^1(G) \xrightarrow{-\Delta} H^{-1}(G)$$

$$X_h \xrightarrow[-\Delta|_{X_h}]{} X_h'$$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Kontinuierliches Problem: Lösung u der Poissongleichung minimiert I mit $I(v) = \dfrac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in \mathring{H}^1$

- $I(u) = \inf_{v \in \mathring{H}^1} I(v) \Rightarrow \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$
- Mit $-\Delta = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi$ haben wir $-(\Delta u)(\varphi) = f(\varphi)$

$$\mathring{H}^1(G) \xrightarrow{-\Delta} H^{-1}(G)$$

$$X_h \xrightarrow[-\Delta|_{X_h}]{} X_h'$$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Kontinuierliches Problem: Lösung u der Poissongleichung minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in \mathring{H}^1$

- $I(u) = \inf_{v \in \mathring{H}^1} I(v) \Rightarrow \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$
- Mit $-\Delta = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi$ haben wir $-(\Delta u)(\varphi) = f(\varphi)$

$$\begin{tikzcd} \mathring{H}^1(G) \arrow[r, "-\Delta"] & H^{-1}(G) \arrow[d, "\cdot|_{X_h}"] \\ X_h \arrow[r, "-\Delta|_{X_h}"'] & X_h' \end{tikzcd}$$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Diskretes Problem: Lösung u_h minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$, endlichdimensional

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Diskretes Problem: Lösung u_h minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$, endlichdimensional

- $X_h = span\{\psi_1, ..., \psi_N\}$, $u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j \psi_j$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Diskretes Problem: Lösung u_h minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$, endlichdimensional

- $X_h = span\{\psi_1, ..., \psi_N\}$, $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j$
- $\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h) \;\Leftrightarrow\; \int_G \nabla u_h \cdot \nabla \psi_i = f(\psi_i)\; 1 \leq i \leq N$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Diskretes Problem: Lösung u_h minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$, endlichdimensional

- $X_h = span\{\psi_1, ..., \psi_N\}$, $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j$
- $\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h) \;\Leftrightarrow\; \int_G \nabla u_h \cdot \nabla \psi_i = f(\psi_i)\; 1 \le i \le N$

$$\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\int_G \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i}_{=S_{ij}} = f(\psi_i)\; 1 \le i \le N \;\Leftrightarrow\; S\underline{u} = \underline{f}$$

Diskretisierung mit Ritz-Galerkin-Verfahren

Diskretes Problem: Lösung u_h minimiert I mit $I(v) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla v|^2 - f(v)$ für $v \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$, endlichdimensional

- $X_h = span\{\psi_1, ..., \psi_N\}$, $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j$
- $\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h) \;\Leftrightarrow\; \int_G \nabla u_h \cdot \nabla \psi_i = f(\psi_i)\; 1 \leq i \leq N$

$$\Leftrightarrow \; \sum_{j=1}^N u_j \underbrace{\int_G \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i}_{=S_{ij}} = f(\psi_i)\; 1 \leq i \leq N \;\Leftrightarrow\; S\underline{u} = \underline{f}$$

Ziel: $||u - u_h||_{H^1(G)} \xrightarrow{h \to 0} 0$

Bestapproximation: Céas Lemma

Mit den Variationsproblemen für u, u_h folgt

diskret	kontinuierlich
$\forall \varphi_h \in X_h$	$\forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$
$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h)$	$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi)$

Leite Abschätzung für $||u - u_h||_{H^1(G)}$ her:

Da $X_h \in \mathring{H}^1(G)$ gilt insbesondere

$$\forall \varphi_h \in X_h : \int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla \varphi_h = 0$$

und für

$$||\nabla(u-u_h)||^2_{L^2(G)} = \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u - \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u_h$$

deshalb mit $u_h \in X_h$

$$= \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla(u-\varphi_h) \le ||\nabla(u-u_h)||_{L^2(G)} \cdot ||\nabla(u-\varphi_h)||_{L^2(G)}$$

sodass folgt

Satz

Für schwache Lösung u, diskrete Lösung $u_h \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$:

$$||\nabla(u-u_h)||_{L^2(G)} = \inf_{\varphi_h \in X_h} ||\nabla(u-\varphi_h)||_{L^2(G)}$$

und für

$$||\nabla(u-u_h)||^2_{L^2(G)} = \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u - \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla u_h$$

deshalb mit $u_h \in X_h$

$$= \int_G \nabla(u-u_h)\cdot\nabla(u-\varphi_h) \leq ||\nabla(u-u_h)||_{L^2(G)}\cdot||\nabla(u-\varphi_h)||_{L^2(G)}$$

sodass folgt

Satz

Für schwache Lösung u, diskrete Lösung $u_h \in X_h \subset \mathring{H}^1(G)$:

$$||\nabla(u-u_h)||_{L^2(G)} = \inf_{\varphi_h\in X_h} ||\nabla(u-\varphi_h)||_{L^2(G)}$$

Geeignete X_h: Simpliziale Lagrange-Elemente

FEM: Simpliziale Lagrange-Elemente

1. Zerlege G in Simplizes T_i, $(h = \max_{T \in \mathcal{T}} h(T))$
2. Stückweise polynomiale Funktionen $\mathbb{P}_k(T_i)$
3. $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\} \cap \mathring{H}^1$

X_h: endlichdimensional, $\subset \mathring{H}^1 \Rightarrow u_h$ eindeutig über S$\underline{u}$=$\underline{f}$ bestimmt,

$$||\nabla(u - u_h)||_{L^2(G)} \sim ||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ||u - \varphi_h||_{H^1(G)}$$

möglich.

Geeignete X_h: Simpliziale Lagrange-Elemente

FEM: Simpliziale Lagrange-Elemente

1. Zerlege G in Simplizes T_i, $(h = \max_{T \in \mathcal{T}} h(T))$
2. Stückweise polynomiale Funktionen $\mathbb{P}_k(T_i)$
3. $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\} \cap \mathring{H}^1$

X_h: endlichdimensional, $\subset \mathring{H}^1 \Rightarrow u_h$ eindeutig über $S\underline{u}=\underline{f}$ bestimmt,

$$||\nabla(u - u_h)||_{L^2(G)} \sim ||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ||u - \varphi_h||_{H^1(G)}$$

möglich.

Ziel: $||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ch^\alpha$: Konvergenz & Abschätzung von RG für X_h

Konvergenz und Abschätzung per Interpolation

Konstruiere Operator I mit $Iu \in X_h$, sodass $||u - Iu||_{H^1(G)} \leq ch^\alpha$

1. *Einführung von Interpolationsoperatoren*
2. *Abschätzung Norm mit Halbnorm*
3. *Transformation mit Halbnormen*
4. *Transformation und Gitterweite*

Konvergenz und Abschätzung per Interpolation

Konstruiere Operator I mit $Iu \in X_h$, sodass $||u - Iu||_{H^1(G)} \leq ch^\alpha$

1. ***Einführung von Interpolationsoperatoren***
   Lagrangeinterpolator, Scott-Zhang-Interpolator, ...
2. *Abschätzung Norm mit Halbnorm*
3. *Transformation mit Halbnormen*
4. *Transformation und Gitterweite*

Konvergenz und Abschätzung per Interpolation

Konstruiere Operator I mit $Iu \in X_h$, sodass $||u - Iu||_{H^1(G)} \leq ch^\alpha$

1. *Einführung von Interpolationsoperatoren*
2. ***Abschätzung Norm mit Halbnorm***
   $||u - Iu||_{H^1(G)} \leq (||I|| + ||E||)|u - Iu|_{H^{k+1}(G)}$
3. *Transformation mit Halbnormen*
4. *Transformation und Gitterweite*

Poincaré-Ungleichungen

Nur höchste Ableitungen $\Rightarrow$ beste Potenzen von h

Satz

Für $G \subset \mathbb{R}^n$ konvex und beschränkt gibt es für $u \in H^{1,p}$, $\int_G u = 0$ ein c_{P_0}, sodass

$$||u||_{L^p(G)} \leq ||\nabla u||_{L^p(G)}$$

$|\cdot|_{H^{l,p}}(G)$ enthält nur höchste Ableitungen

Folgerung

Sei $u \in H^{l,p}$

$$\int_G D^\alpha u = 0 \ (|\alpha| = 1, \dots, l-1) \Rightarrow ||u||_{H^{l,p}(G)} \leq c|u|_{H^{l,p}(G)}$$

Konvergenz und Abschätzung per Interpolation

Konstruiere Operator I mit $Iu \in X_h$, sodass $||u - Iu||_{H^1(G)} \leq ch^\alpha$

1. *Einführung von Interpolationsoperatoren*
2. *Abschätzung Norm mit Halbnorm*
3. ***Transformation mit Halbnormen***
   $|u_h|_{H^m(T_0)} \leq c|A|^m det|A|^{-1/2}|u_h|_{H^m(T)}$
4. *Transformation und Gitterweite*

Konvergenz und Abschätzung per Interpolation

Konstruiere Operator I mit $Iu \in X_h$, sodass $||u - Iu||_{H^1(G)} \leq ch^\alpha$

1. *Einführung von Interpolationsoperatoren*
2. *Abschätzung Norm mit Halbnorm*
3. *Transformation mit Halbnormen*
4. ***Transformation und Gitterweite***
   $c|A|^m det|A|^{-l}|u_h|_{H^m(T)} \leq \sigma(T)h(T)^{m-l}|u_h|_{H^m(T)}$

Konvergenz- und Abschätzungsbeweis

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma(T) \leq \sigma_0$, $\mathcal{T}$ zulässig triangulisiert, $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\} \cap \mathring{H}^1$, u die schwache und u_h die diskrete Lösung.

Mit Céa's Lemma und der Wahl $\varphi_h = Iu$ folgt

$$||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ||u - Iu||_{H^1(G)}$$

1. $I =$Lagrangeinterpolator, $k \geq s$

Lemma

$$H^{s+1} \hookrightarrow H^1 \ n \leq 3 \Rightarrow |u - Iu|_{H^1(T)} \leq c\sigma(T)h(T)^k|u|_{H^{k+1}(T)}$$

$$\sigma \leq \sigma_0 \Rightarrow ||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ch^s|u|_{H^{s+1}(G)}, \text{ für ein } 1 \leq s \leq k$$

Konvergenz- und Abschätzungsbeweis

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma(T) \leq \sigma_0$, $\mathcal{T}$ zulässig triangulisiert, $X_h = \{v_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\} \cap \mathring{H}^1$, u die schwache und u_h die diskrete Lösung.

Mit Céa's Lemma und der Wahl $\varphi_h = Iu$ folgt

$$||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ||u - Iu||_{H^1(G)}$$

2. $I =$Scott-Zhang-Interpolator

Lemma

$$|u - Iu|_{H^1(T)} \leq c\sigma(T)h(T)^k|u|_{H^{k+1}(T)}$$

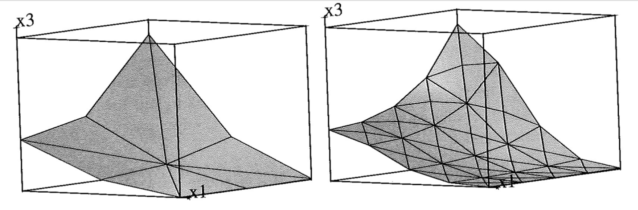
$$\sigma \leq \sigma_0 \Rightarrow ||u - u_h||_{H^1(G)} \leq ch^s|u|_{H^{s+1}(G)}, \text{ für ein } 1 \leq s \leq k$$

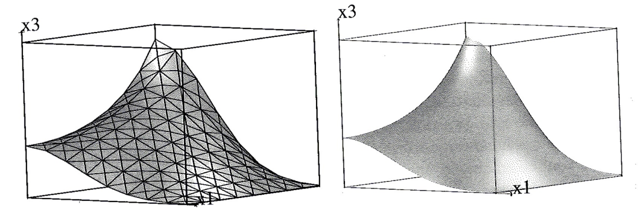
Beispiel mit Abschätzung

Sei auf $G = (0,1)^2$ Funktion $u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} e^{-5x_1^2 + x_2^2}$ kontinuierliche Lösung.

- verwende FEM (linear) für diskrete Lösung
- schätze Fehler ab bez. $L^2, H^{1,2}$ für Gitterweite h.

Beobachte auch $eoc = \log \frac{E(h_1)}{E(h_2)} (\log \frac{h_1}{h_2})^{-1}$ Idee: $E(h) \cong ch^{eoc}$





N	h	$L^2(G)$	eoc	$H^{1,2}(G))$	eoc
4	1.4142136	0.1692133	-	0.4144152	-
9	0.7071068	2.9763055 E-02	2.507	0.1711424	1.276
25	0.3535534	9.9723443 E-03	1.578	0.1014180	0.755
81	0.1767767	2.5503217 E-03	1.967	5.3172370 E-02	0.932
289	8.8388348 E-02	6.3369808 E-04	2.009	2.6427903 E-02	1.009
1089	4.4194174 E-02	1.5773425 E-04	2.006	1.3154480 E-02	1.007
4225	2.2097087 E-02	3.9321173 E-05	2.004	6.5603181 E-03	1.004
16641	1.1048544 E-02	9.8138439 E-06	2.002	3.2757036 E-03	1.002
66049	5.5242717 E-03	2.4512634 E-06	2.001	1.6367118 E-03	1.001
263169	2.7621359 E-03	6.1260703 E-07	2.001	8.1806776 E-04	1.001
1050625	1.3810679 E-03	1.5324733 E-07	1.999	4.0896146 E-04	1.000

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

- Wahl des Verfahrens: Ritz-Galerkin

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

- Wahl des Verfahrens: Ritz-Galerkin
- Verwende dafür Lagrangeelemente auf Simplizes

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

- Wahl des Verfahrens: Ritz-Galerkin
- Verwende dafür Lagrangeelemente auf Simplizes

Bestätigung des Verfahrens

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

- Wahl des Verfahrens: Ritz-Galerkin
- Verwende dafür Lagrangeelemente auf Simplizes

Bestätigung des Verfahrens

- diskrete Lösung approximiert optimal von Funktionen in X_h

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

- Wahl des Verfahrens: Ritz-Galerkin
- Verwende dafür Lagrangeelemente auf Simplizes

Bestätigung des Verfahrens

- diskrete Lösung approximiert optimal von Funktionen in X_h
- Schon nicht optimale Funktionen $Iu \in X_h$ approximieren gut $\sim h^\alpha$

Rückblick zum Vorgehen

Idee der Diskretisierung

Aufbau eines Verfahrens

- Wahl des Verfahrens: Ritz-Galerkin
- Verwende dafür Lagrangeelemente auf Simplizes

Bestätigung des Verfahrens

- diskrete Lösung approximiert optimal von Funktionen in X_h
- Schon nicht optimale Funktionen $Iu \in X_h$ approximieren gut $\sim h^\alpha$

$\Rightarrow$ diskrete Lösung aus Verfahren konvergiert gegen schwache Lösung

Konvergenz der diskreten Lösungen und Fehlerabschätzung

Michael de Mourgues

LMU München

Bruck am Ziller, 08.01.2015