Prof. Dr. Lars Diening
Robert Graf, Maximilian Wank

Sommersemester 2014
12.7.2014

Maß- und Integrationstheorie mehrerer Variablen

Vorbereitungsaufgaben

Nachname: __________ Vorname: __________

Matrikelnr.: __________ Fachsemester: __________

Abschluss: Bachelor, PO ❏ 2007 ❏ 2010 ❏ 2011 Master, PO ❏ 2010 ❏ 2011

Lehramt Gymnasium: ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Diplom ❏ Anderes: __________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen es nicht auf den Tisch. Es ist erlaubt, eine selbst erstellte, beidseitig per Hand beschriebene A4-Seite in der Klausur zu benutzen sowie einen nicht-graphischen Taschenrechner. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, vermerken Sie dies am unteren Ende des Angabenblattes der entsprechenden Aufgabe und schreiben den Rest auf die Rückseite oder auf eine von uns ausgehändigte leere Seite. Sie haben **105 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Da wir keine Aushänge mit Namen oder Matrikelnummern machen dürfen, notieren Sie sich bitte die nebenstehende Zahl, unter der wir Ihr Klausurergebnis veröffentlichen werden.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
max. Punkte	**3**	**5**	**4,5**	**4**	**2**	**3,5**	**4**
Punkte							

Σ Gesamt (max. 26)	

Viel Erfolg !

Name: ____

Aufgabe 1 **(V) Punkte**

Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) := e^{-ax}\chi_{[0,\infty)}(x)$.

Lösung zu Aufgabe 1

Da $a > 0$ ist $f \in L^1(\mathbb{R})$. Genauer folgt, dies aus

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \Big[-\frac{1}{a} e^{-ax} \Big]_0^\infty = \frac{1}{a} < \infty.$$

Also ist die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ wohldefiniert und

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-itx} e^{-ax}\, dx = \int_0^\infty e^{(-it-a)x}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\frac{1}{(-it-a)} e^{(-it-a)x} \Big]_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(0 - \frac{1}{-it-a} e^0 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{it+a}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **(V) Punkte**

Sei P der abgeschnittene Paraboloid

$$P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq z,\, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Bestimmen Sie das Volumen von P. (Tipp: Zylinderkoordinaten.)

Lösung zu Aufgabe 2

Wir benutzen Zylinderkoordinaten mit Ausrichtung in Richtung der z-Achse, d.h.

$$\varPhi \,:\, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \,:\, x \geq 0\}.$$

$\varPhi$ ist ein Diffeomorphismus.
Die Funktionalmatrix ist

$$\nabla\varPhi = (\partial_r\varPhi, \partial_\varphi\varPhi, \partial_z\varPhi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\det(\nabla\varPhi) = r$.
Sei

$$U = \{(r,\varphi,z) \,:\, 0 < r^2 \leq z, 0 \leq z \leq 2, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Dann ist $\varPhi(U) = P$ bis auf eine Nullmenge (Teilmenge von $\{(x,0,z) \,:\, x \geq 0\}$).
Wir berechnen das Volumen von P mit Hilfe des Transformationssatzes und Fubini als

$$\begin{aligned}
\lambda^3(P) &= \int_P d\lambda^3(x,y,z) \\
&= \int_{\varPhi(U)} d\lambda^3(x,y,z) \\
&= \int_U |\det(\nabla\varPhi)|\, d\lambda^3(r,\varphi,z) \qquad \text{Trafosatz} \\
&= \int_U r\, d\lambda^3(r,\varphi,z) \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}} \chi_U(r,\varphi,z) r\, d\lambda^3(r,\varphi,z) \\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dr\, dz \qquad \text{Fubini} \\
&= 2\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{z}} r\, dr\, dz \\
&= 2\pi \int_0^2 \frac{z}{2}\, dz \\
&= 2\pi \cdot \left[\frac{z^2}{4}\right]_{z=0}^{z=2} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **(V) Punkte**

Sei

$$\mathcal{E} := \big\{\{n, 2n, 3n, \ldots\} \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$$

Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$.

Lösung zu Aufgabe 3

Es gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\{k\} = \{k, 2k, 3k, \ldots\} \setminus \bigcup_{n:n>k} \big\{\{n, 2n, 3n, \ldots\}\big\}.$$

Damit sind alle Singletons $\{k\}$ in $\sigma(\mathcal{E})$. Da jede Teilmenge aus $\mathbb{N}$ eine abzählbare Vereinigung von Singeltons ist, gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Aufgabe 4 **(V) Punkte**

Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_p^p = \int_0^\infty p\, t^{p-1} \lambda^d(\{|f| > t\})\, dt.$$

Tipp: Fubini.

Lösung zu Aufgabe 4

Mit Fubini für nicht-negative Funktionen gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty \chi_{\{|f(x)|>\lambda\}} p\lambda^{p-1}\, d\lambda\, dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{|f(x)|>\lambda\}} p\lambda^{p-1}\, dx\, d\lambda \qquad \text{Fubini} \\
&= \int_0^\infty \lambda^d(\{x : |f(x)| > \lambda\})\, p\, \lambda^{p-1}\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

☐ Ankreuzen, falls Rest der Lösung auf Rückseite oder zusätzlichem Blatt.