

---

**Maß- und Integralrechnung**  
**Tutoriumsblatt 7**

---

**Aufgabe 1:**

Sei  $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ . Zeigen Sie:

(a) Für  $x, y > 0$  gilt

$$f(x, y) = \partial_x \partial_y \left( \arctan \frac{x}{y} \right).$$

(b) Es gilt (im Lebesgue-Sinne)

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Es gilt (im Lebesgue-Sinne)

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

(d) Es gilt

$$f \notin \mathcal{L}^1([0, 1]^2).$$

**Aufgabe 2:**

Seien  $B \subset \mathbb{R}^n$  messbar,  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  und  $|f|^2, |g|^2 \in \mathcal{L}^1(B)$ . Zeigen Sie, dass  $fg \in \mathcal{L}^1$  und

$$\int_B |fg| dx \leq \left( \int_B |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_B |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Berechnen Sie hierzu das Doppelintegral  $\iint (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dx dy$ .