Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 17.11.2014

Maß- und Integralrechnung

Tutoriumsblatt 6

Aufgabe 1:

(a) Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$ die zugehörigen Borel'schen σ-Algebren. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \otimes Y)$.

Sie dürfen benutzen, dass $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ die kleinste σ-Algebra ist, so dass die Projektionen $\Pi_X : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x$ und $\Pi_Y : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto y$ messbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subsetneqq \mathfrak{L}^2$, wobei $\mathfrak{L}^d$ die Lebesgue messbaren Mengen des $\mathbb{R}^d$ sind.

Tipp: Betrachten Sie die Schnitte einer geeigneten λ^2-Nullmenge.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die folgenden Beispiele von Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf den Grundmengen B und prüfen Sie jeweils, welche Voraussetzungen

- des Satzes von Beppo Levi (monotone Konvergenz),
- des Lemmas von Fatou,
- des Satzes von Lebesgue (majorisierte Konvergenz)

erfüllt sind:

(a) Sei $B := [0, 1]$, sei $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $B \cap \mathbb{Q}$ und sei $f_k : B \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{r_1, \dots, r_k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) Sei $B := \mathbb{R}$ und sei $f_k : B \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } x \in [-k, k], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) Sei $B := [0, 1]$ und sei $f_k : B \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) := \begin{cases} k & \text{für } x \in [0, \frac{1}{k}], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$