
Maß- und Integralrechnung
Tutoriumsblatt 10

Aufgabe 1:

Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf X definiert wird.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ genau dann ein Prähilbertraum ist, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Der Einfachheit halber dürfen Sie sich auf den Fall eines reellen Vektorraumes beschränken.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass $L^2(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ ein Hilbertraum ist.