Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 08.12.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: **3+3 Punkte**

Seien $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $|f * \varphi|^p \le |f|^p * \varphi$ fast überall (Tipp: Jensen'sche Ungleichung).

(b) Es gilt $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$.

Aufgabe 2: **4+2+3 Punkte**

(a) Seien $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$ wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r}$ mit $p, q, r \in [1, \infty]$. Zeigen Sie: $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

(b) Sei $(g_j)_{j \in \{1,\dots,N\}}$ eine Familie von Funktionen mit $g_j \in \mathcal{L}^{p_j}$ und $\sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r}$ mit $r, p_j \in [1, \infty]$. Zeigen Sie: $\left\|\prod_{j=1}^N g_j\right\|_r \le \prod_{j=1}^N \|g_j\|_{p_j}$.

(c) Sei $p_0, p_1 \in [1, \infty]$. Für $\theta \in]0, 1[$ sei $p_\theta \in [1, \infty]$ definiert durch $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sei $f \in \mathcal{L}^{p_0} \cap \mathcal{L}^{p_1}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}^{p_\theta}$ und

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < \mu(X) < \infty$. Ferner sei $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$. Zeigen Sie:

$$p \mapsto \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist monoton wachsend in $p \in [1, \infty]$ mit Grenzwert $\|f\|_\infty$ für $p \to \infty$.

Folgern Sie $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Abgabe bis Montag, den 15.12.2014 um 10:15 Uhr