Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 01.12.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: **2+4 Punkte**

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Ferner sei φ_ε für $\varepsilon > 0$ definiert durch $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

(b) für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0}(f * \varphi_\varepsilon) = f$ in $\mathcal{L}^1$, d.h. $\lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_1 = 0$.

Aufgabe 2: **2+2+2 Punkte**

Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie:

(a) für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$,

(b) für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$,

(c) es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 3: **5+3 Punkte**

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,y,\varphi) := (r\cos\varphi, y, r\sin\varphi)^T$ die Transformation, welche Zylinderkoordinaten (in Richtung der y-Achse) in kartesische Koordinaten umwandelt. Sei ein messbares $A \subset [0,\infty[\times\mathbb{R}$ die erzeugende Fläche des Rotationskörpers $B := \Phi(A \times [0,2\pi])$.

Die 2. Guldinische Regel besagt:
Das Volumen eines Rotationskörpers ist das Produkt des Flächeninhalts der erzeugenden Fläche mit dem Weg ihres Schwerpunktes.

(a) Beweisen Sie die 2. Guldinische Regel, d.h. zeigen Sie:

$$\lambda^3(B) = 2\pi\int_A r\,\mathrm{d}\lambda^2(r,y) = \lambda^2(A)\cdot 2\pi\frac{1}{\lambda^2(A)}\int_A r\,\mathrm{d}\lambda^2(r,y)$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Torus der von der Fläche

$$A_T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-R)^2+y^2} \le \rho\}$$

erzeugt wird, wobei $0 < \rho < R$.

Abgabe bis Montag, den 08.12.2014 um 10:15 Uhr