Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 17.11.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Sei $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften

(a) $f(\cdot, y) : \Omega, \to \mathbb{R}$ ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ messbar.

(b) $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist für alle $x \in \Omega$ stetig.

Zeigen Sie, dass für jedes messbare $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, u(x))$ messbar ist.
Tipp: Benutzen Sie Treppenfunktionen.

Aufgabe 2: **3+3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt

$$\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

(Wir sagen auch: Das Integral über kleine Menge ist klein.)

Tipp: Widerspruchsbeweis mit $\delta = 2^{-n}$.

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ so, dass

$$\int_{X \setminus A} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$

(Wir sagen auch: Das Integral ist außerhalb einer großen Menge klein.)

Bemerkung: Es genügt uns, wenn Sie die Aufgabe für $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$ zeigen.

Aufgabe 3: **3+3+3 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrierbar, d.h. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_0^x f(y) \, dy. \qquad \text{(Lebesgueintegral)}$$

Zeigen Sie:

(a) F ist stetig.

(b) F ist gleichmäßig stetig. (Tipp: Aufgabe 2)

(c) Ist f stetig in x_0, so ist F in x_0 differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$.

Abgabe bis Montag, den 24.11.2014 um 10:15 Uhr