Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 03.11.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert und dann gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathcal{M}^+$ durch

$$\mu_f : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}},$$
$$\mu_f(A) := \int_X f \cdot \chi_A \mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert ist.

Aufgabe 3: **3+2 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{T}^+$ eine nicht-negative Treppenfunktion mit $f(X) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ und $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

(a) Zeigen Sie
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1})\, \mu(\{f > a_{j-1}\}).$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass
$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{\infty} \mu\big(\{f > \alpha\}\big) \,\mathrm{d}\alpha,$$
wobei das Integral auf der rechten Seite als Riemann-Integral aufgefasst werden kann.

Aufgabe 4: **2+3 Punkte**

(a) Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ Borel-messbar sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Borel-messbaren Abbildungen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum bilden.

Abgabe bis Montag, den 10.11.2014 um 10:15 Uhr