Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 27.10.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 3

Definition: Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sei $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ die *Differenzmenge*.

Aufgabe 1: **1+1+2+1 Punkte**

Sei $A \in \mathcal{L}^d$ mit $\lambda^d(A) > 0$. Zeigen Sie, dass die Differenzmenge $A - A$ eine Umgebung der Null ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass es genügt die Aussage statt für allgemeines $A \in \mathcal{L}^d$ für kompakte Mengen K zu zeigen.

(b) Finden Sie $U \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $K \subset U$ und $\lambda^d(U) < 2\lambda^d(K)$.

(c) Sei $\delta := d(K, U^{\complement}) = \inf\{d(k, y) : k \in K, y \in U^{\complement}\}$ (Abstand der kompakten Menge K zur abgeschlossenen Menge $U^{\complement}$). Zeigen Sie, dass $(t + K) \cap K \neq \emptyset$ für alle $t \in B_\delta(0)$ (mittels Widerspruchsbeweis).

(d) Folgern Sie $B_\delta(0) \subset K - K$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Betrachte die Menge $\mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$, d.h. wir definieren die Relation $a \sim b :\Leftrightarrow\ b - a \in \mathbb{Q}^d$ und betrachten $\mathbb{R}^d/\sim$. Für jede Restklasse wählen wir genau einen Repräsentanten und fassen die so gewählten Repräsentanten in einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ zusammen. (Hierzu wird das Auswahlaxiom gebraucht, was wir hier so akzeptieren.)
Zeigen Sie, dass die Menge A nicht Lebesgue-messbar ist, d.h. $A \notin \mathcal{L}^d$. (Tipp: Aufgabe 1.)

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$ die Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$. (Das Zeichen ι ist ein griechisches kleines Iota).
Zeigen Sie, dass ι zwar $\mathcal{B}^1$-$\mathcal{B}^2$-messbar aber nicht $\mathcal{L}^1$-$\mathcal{L}^2$-messbar ist. (Tipp: Aufgabe 2 und die Vollständigkeit von λ^2 auf $\mathcal{L}^2$.)
Diese Aufgabe zeigt, dass es viel sinnvoller ist Borel-messbare Funktionen zu betrachten als Lebesgue-Lebesgue-messbare Funktionen.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt μ-Atom, falls $\mu(A) > 0$ und aus $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ schon $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \setminus B) = 0$ folgt. (Umgangssprachlich: Ein Atom lässt sich nicht in kleinere Teile aufspalten.)

Aufgabe 4: **3+3 Punkte**

(a) Sei μ das Zählmaß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Bestimmen Sie die Atome von μ.

(b) Zeigen Sie, dass λ^d keine Atome besitzt. (Man sagt λ^d ist atomlos).

Abgabe bis Montag, den 03.11.2014 um 10:15 Uhr