Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 20.10.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: **3+3 Punkte**

Der Halbring $\mathcal{J}^1$ sei definiert durch

$$\mathcal{J}^1 := \{]a,b] \ : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}.$$

Desweiteren sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-fallende Abbildung und $\mu_F : \mathcal{J}^1 \to [0,\infty[$ für $a,b \in \mathbb{R}$ definiert als

$$\mu_F(]a,b]) := F(b) - F(a).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist F rechtsseitig stetig, so ist μ_F ein von innen regulärer Inhalt auf $\mathcal{J}^1$.

(b) μ_F ist genau dann ein Prämaß, wenn F rechtsseitig stetig ist.

Bemerkung: Man nennt μ_F den zu F gehörigen Stieltjes-Inhalt.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es seien $\mu : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{H}$ über der Menge X, μ^* das äußere Maß zu μ, $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die σ-Algebra der μ^*-meßbaren Mengen und

$$\zeta := \left(\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}\right)^*$$

das äußere Maß zu $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$. Zeigen Sie $\zeta = \mu^*$.

Aufgabe 3: **3+3+3 Punkte**

Es seien $\mu : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{H}$ über der Menge X und μ^* das zugehörige äußere Maß. Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $A \subset X$ gibt es ein $C \in \sigma(\mathcal{H})$ mit $A \subset C$ und $\mu^*(A) = \mu^*(C)$.

(b) Für alle $A, B \subset X$ ist $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$, wobei das Gleichheitszeichen gilt, falls $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ oder $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(c) Es seien $M, N \subset X$, und es gebe $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $M \subset A$, $N \subset B$, sowie $\mu^*(A \cap B) = 0$. Zeigen Sie $\mu^*(M \cup N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$.

Abgabe bis Montag, den 27.10.2014 um 10:15 Uhr