Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 14.01.2015

# Maß- und Integralrechnung

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1:** **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass $\{\frac{e^{ik\,\cdot}}{\sqrt{2\pi}} : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem des $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ ist.

**Aufgabe 2:** **5 Punkte**

Berechnen Sie die Fourierreihe der $2\pi$-periodischen Fortsetzung der auf $[-\pi,\pi)$ definierten Funktion $f(x) = \cosh(x)$.

**Aufgabe 3:** **5 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $U \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum mit Basis $\{e_1,\dots,e_d\}$, wobei $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{lin}(e_1,\dots,e_d) = \overline{\operatorname{lin}}(e_1,\dots,e_d)$.

**Aufgabe 4:** **5 Punkte**

Für $f \in L^1_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ definieren wir

$$\begin{aligned}
(S_n f)(x) &:= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k(f) e_k(x),\\
(T_n f)(x) &:= \tfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (S_k f)(x),\\
(D_n)(x) &:= \begin{cases} 2n+1 & \text{für } x = 0 \text{ und}\\ \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{für } x \neq 0,\end{cases}\\
(F_n)(x) &:= \begin{cases} n & \text{für } x = 0 \text{ und}\\ \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})} & \text{für } x \neq 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Beweisen Sie die Darstellungen

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y)\,dy \quad \text{und} \quad (T_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y)\,dy.$$