Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 15.12.2014

# Maß- und Integralrechnung

## Übungsblatt 10

**Aufgabe 1:** **2+2+2 Punkte**

Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $C^\infty$-Funktionen $h_n : \mathbb{R}^d \to [0,\infty[$ mit $\operatorname{supp}(h_n) \subset B_{\frac{1}{n}}(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)\mathrm{d}x = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für $p \in [1,\infty]$ gilt

$$u \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \|h_n * u\|_p \leq \|u\|_p.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $p \in [1,\infty[$ gilt

$$u \in L^p(\mathbb{R}^d) \Rightarrow h_n * u \to u \text{ in } \left(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p\right) \text{ für } n \to \infty.$$

(c) Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt.

**Aufgabe 2:** **2+2+1 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) für $p, q \in [1,\infty[$ mit $p > q$ exisitiert eine Konstante $c$, die nur von $p$, $q$, und $\mu(X)$ abhängt, so dass für alle messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\|f\|_q \leq c\|f\|_p.$$

(b) für $q \in [1,\infty[$ exisitiert eine Konstante $c$, die nur von $q$ und $\mu(X)$ abhängt, so dass für alle messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\|f\|_q \leq c\|f\|_\infty.$$

(c) für $1 \leq q < p \leq \infty$ gilt

$$L^p(X,\mu) \subset L^q(X,\mu).$$

**Aufgabe 3:** **3+1 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass der Dualraum $\mathcal{H}^*$ wiederum ein Hilbertraum ist.

(b) Geben Sie das Skalarprodukt von $\mathcal{H}^*$ explizit an.

**Aufgabe 4:** **2+3 Punkte**

Sei $X$ ein Prähilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $X \to \mathbb{K}$ die durch $x \mapsto \langle x, y\rangle$ und $y \mapsto \langle x, y\rangle$ definiert sind stetig sind.

(b) Sei $U \subset X$ ein dichter Unterraum und $x \in X$ mit $\langle x, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$. Zeigen Sie, dass dann $x = 0$ gilt.

Abgabe bis Montag, den 22.12.2014 um 10:15 Uhr