Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 13.10.2014

Maß- und Integralrechnung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: **3+3+3 Punkte**

Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem und $\mathcal{A} := \mathcal{R} \cup \{A^{\complement} : A \in \mathcal{R}\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{R}$ ein Ring, so ist $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte Algebra, d.h. $\mathcal{A}$ ist die kleinste Algebra, welche $\mathcal{R}$ enthält.

(b) Ist $\mathcal{R}$ ein σ-Ring, so ist $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$, d.h. $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra, welche $\mathcal{R}$ enthält.

(c) Sei $X := \mathbb{R}$ und $\mathcal{E} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ (die Menge der Singletons). Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$.

Hinweis: Im Tutorium wird gezeigt, dass gilt: Sei X eine Menge. Dann ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ genau dann eine Algebra ist, wenn gilt

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(b) Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $A^{\complement} \in \mathcal{A}$.

(c) Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Sie dürfen dies zur Lösung der Aufgabe verwenden.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring über X. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H} \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

gleich dem von $\mathcal{H}$ erzeugtem Ring ist.

Aufgabe 3: **3+3 Punkte**

Sei X eine Menge und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von X und $A \subset X$ eine Menge mit $A_n \to A$. Zeigen Sie, dass für $x \in X$ gilt:

(a) $x \in A$ genau dann, wenn $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : x \in A_n$.

(b) $x \notin A$ genau dann, wenn $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : x \notin A_n$.

Abgabe bis Montag, den 19.10.2014 um 10:15 Uhr