Orlicz-Räume

Toni Scharle

LMU München

Zillertal / 12.12.2013 – 15.12.2013

Motivation

Erinnerung:

$$
\begin{aligned}
u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x \\
= \int_\Omega A\left(|u(x)|\right) \mathrm{d}x < \infty
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit } A : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad t \mapsto t^p
$$

Mögliche Verallgemeinerung: Ersetze A durch eine andere konvexe und monoton steigende Funktion!

N-Funktionen

Definiere zunächst

$$a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$

mit

- $a(0) = 0$, $a(s) > 0$ für $s > 0$, $\lim_{s\to\infty} a(s) = \infty$
- $a(t) \geq a(s)$ falls $t > s$
- a ist rechtsstetig

Dann nennen wir

$$A(t) = \int_0^t a(s)\mathrm{d}s$$

eine **N-Funktion**

Eigenschaften

- A ist stetig
- $A(t) > A(s)$ für $t > s$
- Es gilt mit $r > (<) 1$:
  $A(rt) = \int_0^{rt} a(s)\mathrm{d}s = r\int_0^t a(rs)\mathrm{d}s \geq (\leq) r\int_0^t a(s)\mathrm{d}s = rA(t)$
- A ist konvex, denn: $A(\lambda s + (1-\lambda)t) = \int_0^{\lambda s} a(s)\mathrm{d}s + \int_{\lambda s}^{(1-\lambda)t} a(s)\mathrm{d}s \leq A(\lambda s) + A((1-\lambda)t) \leq \lambda A(s) + (1-\lambda)A(t)$
- $\lim_{t\to 0} \frac{A(t)}{t} = 0$ und $\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \infty$
  $\frac{1}{t}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s \leq a(t)$ und $\frac{1}{t}\int_0^t a(s)\mathrm{d}s \geq \frac{1}{t}\int_{t/2}^t a(s)\mathrm{d}s \geq \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)$

Komplementäre N-Funktion

Sei durch $\tilde{a}(s) = \sup_{a(t) \leq s} t$ die Pseudo-Inverse zu a gegeben. Dann heißt

$$\tilde{A}(t) = \int_0^t \tilde{a}(s) \mathrm{d}s$$

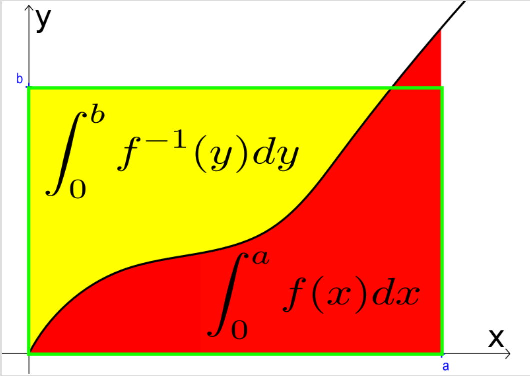
die zu A **komplementäre N-Funktion**.

Beispiel: Für $A(t) = t^p$, also $a(s) = pt^{(p-1)}$ haben wir
$\tilde{A}(t) = \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{q-1} \frac{1}{q} t^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Die Young'sche Ungleichung

Für komplementäre N-Funktionen A und $\tilde{A}$ gilt:

$$s \cdot t \leq A(t) + \tilde{A}(s)$$



Dominanz und Äquivalenz von N-Funktionen, die Δ_2-Bedingung

- *B dominiert A* global (nahe unendlich), falls gilt:

$$\exists k > 0 : \forall t \geq 0(t_0) : A(t) \leq B(kt)$$

- B und A sind *äquivalent* falls A von B und B von A dominiert wird.
- A erfüllt die *Δ_2-Bedingung* global (nahe unendlich), falls gilt:

$$\exists k > 0 : \forall t \geq 0(t_0); A(2t) \leq kA(t)$$
$$\Leftrightarrow, \forall r > 0 \exists k > 0 : \forall t \geq 0(t_0) A(rt) \leq kA(t)$$

Beispiel: t^p erfüllt die Δ_2-Bedingung global und dominiert t^q nahe unendlich, aber nicht global falls $q \leq p$.

Die Orlicz-Klasse K_A

Wir definieren

$$K_A = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} : \int_\Omega A\left(|u(x)|\right) \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

K_A ist dann aufgrund der Kovexität von A stets selbst konvex, im Allgemeinen aber kein Vektorraum.

Erfüllt A aber die Δ_2-Bedingung global, so gilt für $u \in K_A$: $\int_\Omega A\left(|\lambda u(x)|\right) \mathrm{d}x \leq k\left(|\lambda|\right) \int_\Omega A\left(|u(x)|\right) \mathrm{d}x < \infty$ und K_A wird zum Vektorraum. Ist $|\Omega| < \infty$, so genügt die Erfüllung der Δ_2-Bedingung nahe unendlich:

$$\begin{aligned}\int_\Omega A\left(|\lambda u(x)|\right) \mathrm{d}x &= \int_{u(x) \leq t_0} A\left(|\lambda u(x)|\right) \mathrm{d}x + \int_{u(x) > t_0} A\left(|\lambda u(x)|\right) \mathrm{d}x \\ &\leq A(\lambda t_0)|\Omega| + k \int_\Omega A\left(|\lambda u(x)|\right) \mathrm{d}x < \infty\end{aligned}$$

Orlicz-Raum L_A und Luxemburg-Norm

Wir definieren $L_A = \mathbb{LH}(K_A)$ und statten den Raum mit der Norm

$$||u||_A = \inf\left\{k > 0 : \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x \leq 1\right\}$$

aus.

Das Infimum wird angenommen, denn mit monotoner Konvergenz und der Stetigkeit von A haben wir:

$$\begin{aligned}\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A}\right)\mathrm{d}x &= \int_\Omega \lim_{k\searrow||u||_A} A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\searrow||u||_A}\int_\Omega \left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x \leq 1\end{aligned}$$

Eigenschaften

- $(L_A, ||.||_A)$ ist ein Banachraum.
  (Beweis analog zur Vollständigkeit von L^p)
- $\int_\Omega |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \leq 2||u||_A||v||_{\tilde{A}}$ für komplementäre N-Funktionen A und $\tilde{A}$, denn

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|\,|v(x)|}{||u||_A||v||_{\tilde{A}}}\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \left(A\left(\frac{|u(x)|}{||u||_A}\right) + \tilde{A}\left(\frac{|v(x)|}{||v||_{\tilde{A}}}\right)\right)\mathrm{d}x \leq 2$$

Beispiel: Für $A(t) = t^p$ haben wir $K_A = L_A = L^p$ und $||.||_A = ||.||_p$, denn

$$||u||_p = \inf\left\{k > 0 : \int_\Omega |u(x)|^p \leq k^p\right\}$$

Einbettung

$$L_B \hookrightarrow L_A \Leftrightarrow A \text{ dominiert } B$$

$$\text{“}\Leftarrow\text{“}: 1 \geq \int_\Omega B\left(\frac{|u(x)|}{||u||_B}\right) \mathrm{d}x \geq \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k||u||_B}\right) \mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow ||u||_A \leq k||u||_B$$

Für “$\Rightarrow$“ betrachten wir eine Folge k_n mit $B(nk_n) < A(k_n)$ und definieren $u_n = k_N \mathcal{X}_{\Omega_n}$ wobei $|\Omega_n| = (B(nk_n))^{-1}$ ist und es gilt:

$$\int_{\Omega_n} A(k_n) \,\mathrm{d}x > \int_{\Omega_n} B(nk_n) \,\mathrm{d}x = 1$$

$$\Rightarrow \left(||u_n||_A > 1 \wedge ||u_n||_B = \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \text{id: } L_B \hookrightarrow L_A \text{ist nicht stetig}$$

Der Raum E_A

$$E_A := \overline{\{u : \Omega \to \mathbb{K} |\ ||u||_\infty < \infty, \operatorname{supp} u \subset B(0, R)\}}^{||.||_A}$$

Es gilt $E_A \subset K_A$: $(||v||_\infty < \infty, \operatorname{supp} v \subset B(0, R),\ u \in E_A,\ ||u - v||_A < \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{||2u - 2v||_A} \int_\Omega A(|2u - 2v|)\mathrm{d}x \le \int_\Omega A\left(\frac{|2u - 2v|}{||2u - 2v||_A}\right)\mathrm{d}x \le 1$$

$$\Rightarrow ((2u - 2v) \in K_A \wedge 2v \in K_A) \Rightarrow u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v) \in K_A$$

E_A ist damit ein Untervektorraum von K_A.

E_A ist sogar der maximale Unterraum von K_A, denn wir definieren:

$$u_j(x) = \begin{cases} u(x), \text{falls } |u(x)| \leq j \text{ und } |x| \leq j \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

und haben, falls u in einem beliebigen Unterraum von K_A liegt, mit majorisierter Konvergenz für j groß genug:

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u_j(x) - u(x)|}{\varepsilon}\right) \leq 1$$

Damit konvergiert u_j in Norm gegen u und u liegt auch in E_A.
Falls A also die Δ_2-Bedingung erfüllt, gilt $L_A = E_A = K_A$.

Ausblick

- Auf L_A lässt sich durch $||u||_{(A)} = \sup_{||v||_{\tilde{A}} \leq 1} |\int uv|$ eine weitere Norm, die Orlicz-Norm, definieren und wir haben $||u||_A \leq ||u||_{(A)} \leq 2||u||_A$.
- Es gilt $(L_A, ||.||_A)^* = (E_{\tilde{A}}, ||.||_{(\tilde{A})})$
- Analog zu den L^p-Räumen können auch für Orlicz-Räume Sobolev-Räume definiert werden.