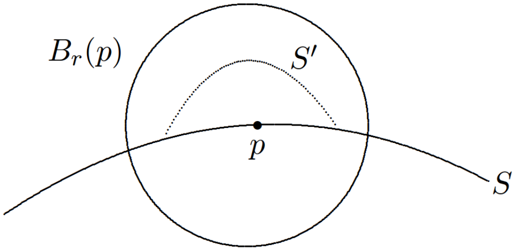
LMU München • Alexandra Meyer

Minimalflächen



$S \subset \mathbb{R}^3$ Minimalfläche, $p \in S$,
$B_r(p) \in \mathbb{R}^3$ mit genügend kleinem $r > 0$

$$A_{B_r(p)}(S) \leq A_{B_r(p)}(S')$$

Zugang von Haar

Der Lösungsansatz von Haar

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=0$$
$$f|_{\partial\Omega}=\Phi$$

minimiert das Flächenfunktional

$$A_\Omega(f)=\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}dx$$

mit $f:\Omega\to\mathbb{R},\ f|_{\partial\Omega}=\Phi$

Probleme und Lösungsweg

Probleme bei Minimierung von Flächen

Minimalfolgen müssen nicht konvergent sein

Weg:

- A_Ω auf Räumen verallg. Funktionen zu studieren
- die Existenz der Minimalfläche beweisen

Lösung:

- Strenge Konvexität von Ω - damit f beschränkt ist
- Lipschitzstetigkeit - damit die Minimalfolgen konvergieren
- Lipschitzkonstante Funktionen - Eindeutigkeit der Lösung
- Bounded Slope Condition - Existenz der Lösung

Lipschitzstetigkeit

Definition von Lipschitzstetigkeit

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* auf Ω falls eine Konstante $M \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \qquad \forall x, y \in \Omega$$

Die *Lipschitzkonstante Lip(f)* von f ist die kleinste dieser Zahlen

$$Lip(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} | f \text{ Lipschitz stetig, } f \text{ beschränkt}\}$$

Satz von Rademacher

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, dann existiert eine Ableitung von f f.ü. auf Ω mit

$$|\nabla f(x)| \leq Lip(f) \qquad \forall x \in \Omega \text{ differenzierbar}$$

Eigenschaften von A_Ω

Satz

1. Auf $Lip(\Omega)$ ist A_Ω ein konvexes Funktional
2. $C \subset Lip(\Omega)$ konvexes Teilmenge, die nicht zwei nur durch eine Konstante verschiedene Funktion enthält $\Rightarrow A_\Omega$ streng konvex auf C

Beweisskizze von (1): Mit $f, g \in Lip(\Omega),\ 0 \leq t \leq 1$

$$A_\Omega(tf + (1-t)g) \leq tA_\Omega(f) + (1-t)A_\Omega(g)$$

wobei Gleichheit gilt für $t = 0,\ t = 1$ oder $\nabla f = \nabla g$ fast überall.
Beweis von (2): Mit $f, g \in Lip(\Omega),\ 0 \leq t \leq 1$

$$A_\Omega(tf + (1-t)g) = tA_\Omega(f) + (1-t)A_\Omega(g)$$

Mit (1) folgt $\nabla f = \nabla g$ f.ü. Da f Lipschitz-stetig: $\nabla f - \nabla g := \nabla \varphi = 0$ f.ü.
$\Rightarrow \varphi = konst \Rightarrow f = g$ nach Wahl von C

Beispiel: $C = \{f \in Lip(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \Phi, f \in C^0(\overline{\Omega})\}$ mit Randfunktion Φ

Beschränkte Lipschitzkonstante Lip(f)

Definition

$$R \geq Lip(\Phi): \quad Lip_R(\Omega, \Phi) := \{f \in Lip(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \Phi|_{\partial\Omega},\ Lip(f) \leq R\}$$

Satz

In $Lip_R(\Omega, \Phi)$ existiert genau ein $f_R \in Lip_R(\Omega, \Phi)$ mit

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f) \qquad \forall f \in Lip_R(\Omega, \Phi)$$

Beweisskizze:

- (f_m) eine Minimalfolge in $Lip_R(\Omega, \Phi)$
- Man zeigt, dass die Minimalfolge gleichmäßig beschränkt
- Satz von Ascoli $\Rightarrow \exists$ Teilfolge(g_m) und $f_R \in C^0(\overline{\Omega})$ gegen die g_m auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergiert, $f_R \in Lip_R(\Omega, \Phi)$
- Mit Konvexität von A_Ω folgt Eindeutigkeit.

Vergleichssatz

Vergleichssatz

- Ψ Lipschitz-stetige Funktion mit $Lip(\Psi) \leq R$, g_R sei A_Ω minimal in $Lip_R(\Omega, \Psi)$, f_R sei A_Ω minimal in $Lip_R(\Omega, \Phi)$, gilt $\Psi \leq \Phi$ auf $\partial\Omega$ dann folgt

$$f_R \leq g_R \text{ auf } \overline{\Omega}$$

Beweis des Vergleichssatzes

Beweis: Mit $h_R := \min(f_R, g_R) \in Lip_R(\Omega, \Phi)$

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(h_R) = A_{[f_R \leq g_R]}(f_R) + A_{[f_R > g_R]}(g_R)$$
$$\Rightarrow A_{[f_R > g_R]}(f_R) \leq A_{[f_R > g_R]}(g_R)$$

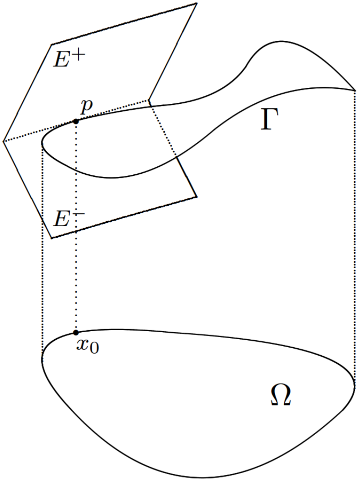
Analog für $H_R := \max(f_R, g_R) \in Lip(\Omega, \Psi) \Rightarrow A_\Omega(g_R) \leq A_\Omega(H_R)$ folgt

$$A_{[f_R > g_R]}(g_R) \leq A_{[f_R > g_R]}(f_R)$$

zusammen folgt $A_\Omega(f_R) = A_\Omega(h_R)$.

Mit der Eindeutigkeit von f_R in $Lip(\Omega, \Phi) \Rightarrow f_R = h_R = min(f_R, g_R)$
mit der Vorraussetzung $\Phi \leq \Psi$ folgt $f_R \leq g_R$ auf $\overline{\Omega}$

Bounded Slope Condition



Bounded Slope Condition Definition

$\Gamma := \{(z, \Phi(z)) : z \in \partial\Omega\}$*Randmannigfaltigkeit*

Definition von B.S.C.

Die Randmannigfaltigkeit Γ erfüllt die *Bounded Slope Condition*(beschränkte Steigung) mit Konstange $K \geq 0$ falls gilt, dass es für alle $p = (x_0, \Phi(x_0)) \in \Gamma$ eine affin-lineare Funktion $L^{\pm} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$L_p^{\pm}(x) = a^{\pm} \cdot (x - x_0) + \Phi(x_0) \qquad a^{\pm} = a^{\pm}(p) \in \mathbb{R}$$

gibt, mit den Eigenschaften

- $L_p^{-}(x) \leq \Phi(x) \leq L_p^{+}(x)$
- $|a^{\pm}| \leq K$

Satz

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex, $\Phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, B.S.C. mit $K \geq 0$ erfüllt. Dann gilt: f_R eind. Minimalstelle von A_Ω in $Lip(\Omega, \Phi)$ und

$$\forall R > K : Lip(f_R) \leq K$$

Beweisskizze: $x_0 \in \partial\Omega$ und $L^- \leq \varphi \leq L^+$ auf $\partial\Omega$ mit $Lip(L^\pm) \leq K$,
$L^-(x_0) = \varphi(x_0) = L^+(x_0)$
Vergleichssatz $\Rightarrow L^- \leq f_R \leq L^+$ auf Ω
Für $x \in \overline{\Omega}$ folgt:

$$f_R(x) - f_R(x_0) \leq L^+(x) - f_R(x_0) = L^+(x) - L^+(x_0) \leq K|x - x_0|$$

Analog: $f_R(x) - f_R(x_0)| \geq -K|x - x_0|$
$\Rightarrow |f_R(x) - f_R(y)| \leq K|x - y| \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, y \in \partial\Omega$

Abschließender Satz

Satz

Sei Ω beschränkt und konvex sowie $\Phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig. Erfüllen Ω und Φ eine B.S.C., so gibt es genau eine Funktion $f \in Lip(\Omega, \Phi) := \{g \in Lip(\Omega) : g|_{\partial\Omega} = \Phi\}$, so dass $\forall g \in Lip(\Omega, \Phi)$ gilt:

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx \leq A_\Omega(g)$$

Abschließender Satz

Beweisskizze Wähle $R > K$, $f_R \in Lip_R(\Omega, \Phi)$ Minimalstelle. $Lip(f_R) \leq R$
Es gilt $f_R + \varepsilon(g - f_R) \in Lip_R(\Omega, \Phi) \quad \forall g \in Lip(\Omega, \Phi), |\varepsilon| \ll 1$

$$\Rightarrow A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f_R + \varepsilon(g - f_R))$$

daraus folgt: $\int_\Omega \frac{\nabla f \nabla(g-f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dx = 0$ mit

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla g|^2} dx - \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx \geq \int_\Omega \frac{\nabla f \nabla(g - f)}{\sqrt{1 + \int \nabla f|^2}} dx$$

folgt:

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla g|^2} dx \geq \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

Zusammenfassung

Das Flächenfunktional minimeren

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

Weg:

- Strenge Konvexität von Ω - damit f beschränkt ist
- Lipschitzstetigkeit - damit die Minimalfolgen konvergieren
- Lipschitzkonstante Funktionen - Eindeutigkeit der Lösung
- Bounded Slope Condition - Existenz der Lösung