Der Überdeckungssatz von Besicovic

Andreas Fenzl

LMU München

Zillertal / 12.12.2013 – 15.12.2013

Einführung

Ziel:

a) Wir wollen Bälle $\{B_i\}_i$ finden,

die ohne Erweiterung, eine Menge A überdecken

und $\frac{1}{3}B_i$ sollen disjunkt sein.

b) Die Bälle sollen A endlich überdecken.

Besicovitchs Überdeckungssatz

Ist F eine Menge abgeschlossener Bälle im $\mathbb{R}^n$ mit

$$sup\{diam(B) : B \in F\} < \infty$$

und A ist die Menge der Mittelpunkte der Bälle in F,

dann existiert $G_1,\ldots,G_{N_n} \subset F$ so dass jedes G_i ist eine Sammlung zählbarer disjunkter Bälle in F und A $\subset \bigcup_{i=1}^{N_n} \bigcup_{B \in G_i} B$.

Beweis (Theorem)

Annahme: A ist begrenzt und $D := sup\{diam(B) : B \in F\}$

Wähle einen Ball $B_1 = B(a_1, r_1) \in F$ so dass $r_1 \geq \frac{3}{4}\frac{D}{2}$

$$A_j := A - \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$$

- Ist $A_j = \emptyset$ STOP und $J = j - 1$
- Ist $A_j \neq \emptyset$ wähle $B_j = B(a_j, r_j) \in F$ so dass $a_j \in A_j$ und $r_j \geq \frac{3}{4} sup\{r : B(a, r) \in F, a \in A_j\}$
- Ist $A_j \neq \emptyset$ $\forall j$ setze $J = \infty$

Behauptung *1

Ist $j > i$ dann $r_j \leq \frac{4}{3} r_i$

Beweis: Annahme $j > i \Rightarrow a_j \in A_i$

$$\text{somit } r_i \geq \frac{3}{4} sup\{r : B(A, r) \in F, a \in A_i\} \geq \frac{3}{4} r_j$$

Behauptung *2

Die Bälle $\{B(a_j, \frac{r_j}{3})\}_{j=1}^{J}$ sind disjunkt

Beweis: Sei $j > i \Rightarrow a_j \notin B_i$

$$\text{daher } |a_i - a_j| > r_i = \frac{r_i}{3} + \frac{2r_i}{3} \geq \frac{r_i}{3} + \frac{2}{3}\frac{3}{4} r_j > \frac{r_i}{3} + \frac{r_j}{3}$$

Behauptung *3 Ist $J = \infty$ *dann* $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$

Beweis: Nach Beh. *2 sind die Bälle $\{B(a_j, \frac{r_j}{3})\}_{j=1}^{J}$ disjunkt.

Weil $a_j \in A$ und A begrenzt $\Rightarrow r_j \to 0$

Behauptung *4 $A \subset \bigcup_{j=1}^{J} B_j$

Beweis:

- Ist $J < \infty$ trivial
- Annahme $J = \infty$
  Ist $a \in A$ dann $\exists r > 0$ sodass $B(a, r) \in F$
  Nach Beh. *3 existiert ein r_j *mit* $r_j < \frac{3}{4} r$

  Es wäre ein Widerspruch zur Wahl von r_j falls $a \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i$

Sei $k > 0$ fixiert und $I := \{j: \ 1 \leq j < k, B_j \cap B_k \neq 0\}$

Wir möchten die Mächtigkeit von I abschätzen

$K := I \cap \ \{j: \ r_j \leq 3r_k\}$

Behauptung *5 $Card(K) \leq 20^n$

Beweis: Sei $j \in K \Rightarrow B_j \cap B_k \neq \emptyset$ *und* $r_j \leq 3r_k$

Wähle $x \in B(a_j, \frac{r_j}{3}) \Rightarrow |x - a_k| \leq 5r_k$

Also gilt $B(a_j, \frac{r_j}{3}) \subset B(a_k, 5r_k)$

$$\alpha(n)5^n(r_k)^n = \mathrm{L}^n B(a_k, 5r_k) \geq \sum_{j \in K} \mathrm{L}^n B(a_j, \tfrac{r_j}{3}) = \sum_{j \in K} \alpha(n)(\tfrac{r_j}{3})^n \geq$$

$$\sum_{j \in K} \alpha(n)(\tfrac{r_k}{4})^n = Card(K)\alpha(n)\frac{(r_k)^n}{4^n}$$

Nun schätzen wir $Card(I - K)$ ab.

Sei $i, j \in I - K \Rightarrow B_i \cap B_k \neq \emptyset$, $B_j \cap B_k \neq \emptyset$ und $r_i \geq 3r_k, \; r_j \geq 3r_k$

Sei Θ der Winkel zwischen den Vektoren a_i und a_j weil $|a_k| = 0$

Unser Ziel ist es eine untere Schranke für Θ zu finden.

O.B.d.A. $|a_i| \leq |a_j|$

$$3r_k < r_i < |a_i| \leq r_i + r_k$$

$$3r_k < r_j < |a_j| \leq r_j + r_k$$

Behauptung *6a

Ist $a_i \notin B_j \Rightarrow cos(\Theta) \leq \frac{5}{6}$

Beweis:

Fallunterscheidung zwischen $|a_i - a_j| \geq |a_j|$ und $|a_i - a_j| \leq |a_j|$

Kosinussatz für 1. Fall $cos(\Theta) = \frac{|a_i|^2+|a_j|^2-|a_i-a_j|^2}{2|a_i||a_j|} \leq \frac{|a_i|^2}{2|a_i||a_j|} \leq \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \Theta > arccos(\frac{5}{6})$

Behauptung *6b Ist $a_i \in B_j \Rightarrow cos(\Theta) \leq \frac{61}{64}$

Beweisidee: Siehe Skizze

Insgesamt ist $\Theta \geq arccos(\frac{61}{64}) = \Theta_0 > 0$

<u>Behauptung *7</u> $\exists$ ein konstantes L_n sodass $Card(I - K) \leq L_n$

<u>Beweis:</u> Fixiere $r_0 > 0$ und $x \in \delta B(0,1)$ sowie $y, z \in B(x, r_0)$

$\Rightarrow$ Winkel zw. y und z $< \Theta_0$

L_n Bälle mit Radius r_0 und Mittelpunkte auf $\delta B(0,1)$ überdecken Rand.

δB_k kann mit L_n Bällen mit Radius $r_0 r_k$ überdeckt werden.

Nach Beh. *6 ist $\Theta > \Theta_0$

$\Rightarrow Card(I - K) \leq L_n$

Insgesamt $Card(I) = Card(K) + Card(I - K) \leq 20^n + L_n < M_n$

Definition von $G_1, ..., G_{M_n}$

Def. $\sigma : \{1, 2, ...\} \to \{1, ..., M_n\}$

a) $\sigma(i) = i$ für $1 \leq i \leq M_n$

b) Für $k \geq M_n$ gilt:

$\text{Card}(j : 1 \leq j \leq k, B_j \cap B_{k+1} \neq \emptyset) < M_n$

$\exists l \in \{1, ..., M_n\}$ sodass $B_{k+1} \cap B_j = \emptyset \ \forall j$

$\Rightarrow \sigma(j) = l (1 \leq j \leq k)$ und $G_j := \{B_i : \sigma(i) = j\}$

Insgesamt: $A \subset \bigcup_{i=1}^{J} B_i = \bigcup_{i=1}^{M_n} \bigcup_{B \in G_i} B$