Harmonische und Holomorphe Funktionen

Jonathan Bischoff

LMU München

Zillertal am 14.12.2014

Definition harmonische Funktion

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn

$$\Delta : f \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Der Differentialoperator $\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ heißt *Laplace Operator*

Def. holomorpher Funktionen

$f : U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn f in jedem Punkt $a \in U$ komplex diffbar ist $\Leftrightarrow$ die Cauchy Riemanschen Differentialgleichungen erfüllt.

$$\frac{\partial \mathsf{u}}{\partial \mathsf{x}} = \frac{\partial \mathsf{v}}{\partial \mathsf{y}}$$

$$\frac{\partial \mathsf{u}}{\partial \mathsf{y}} = -\frac{\partial \mathsf{v}}{\partial \mathsf{x}}$$

die Abeleitung ist holomorph und gegeben durch

$$f' = \frac{\partial \mathsf{u}}{\partial \mathsf{x}} + \mathrm{i}\frac{\partial \mathsf{v}}{\partial \mathsf{x}} = \frac{\partial \mathsf{v}}{\partial \mathsf{y}} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathsf{u}}{\partial \mathsf{y}}$$

Sind holomorphe Funktionen harmonisch?

aus der Ableitung folgt,

$$\frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial}(-\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$\frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial v}{\partial x}) = -\frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial v}{\partial y})$$

$\Rightarrow \Delta(u) = \frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$
$\Rightarrow \Delta(v) = \frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial}(\frac{\partial v}{\partial y}) = 0$

Nach Definition sind $Re(f) = u$ mit $\Delta(u) = 0$ und $Im(f) = v$ mit $\Delta(v) = 0$ harmonische Funktionen
Man nennt u und v *konjugiert harmonisch*

Harmonische Funktion als Realteil einer holomorphen Funktion

Sei u harmonisch gegeben:

Es existiert eine holomorphes $f = u + \mathrm{i}v$ f in U

Sei $u : g(z) = u_\mathrm{x}(x, y) - \mathrm{i}u_\mathrm{y}(x, y)$ harmonisch $\Delta(u) = 0$ also erfüllt
$u_\mathrm{x}, -u_\mathrm{y}$ die CR-Diff und sind in U total Diffbar
$\Rightarrow g$ ist homolorph in U
$F'(z) = g(z), z \in U$, $F = \tilde{u} + \mathrm{i}\tilde{v}$ ist Stammfkt nach *Cauchy-Goursat*
Mit $c =$ konstant $F' = g$ ist auch $(F + c)' = g$
Also $(\tilde{u} - u)_\mathrm{x} = 0$ und $(\tilde{u} - u)_\mathrm{y} = 0$ in U
daraus folgt $\tilde{u} = u$ in D

Potenzreihenentwicklung

Theorem

Analytische Funktionen sind holomorph

Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

habe den Konvergenzkreis $B_R(z_0)$ Dann ist $P(z)$ in $B_R(z_0)$ *holomorph* und gliedweises Differenzieren liefert

$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} v a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}$$

Potenzreihenentwicklung

Ist γ ein geschlossener Weg in $B_{R'}(z_0)$ dann ist $\int_\gamma (z-z_0)^\nu dz = 0$

$$\int_\gamma Q(z)dz = \sum_1^\infty \nu a_\nu \int_\gamma (z-z_0)^{\nu-1} dz = 0$$

Q hat eine Stammfunktion auf D

$$\int_\gamma Q(\xi)d\xi = \sum_1^\infty \nu a_\nu \int_\gamma (\xi - z_0)^{\nu-1} d\xi = \sum_1^\infty a_\nu (z-z_0)^\nu$$

$P(z) = a_0 + \int_\gamma Q(\xi)d\xi$ auf ganz D Stammfunktion von $Q : P'(z) = Q(z)$

Potenzreihenentwiklung

Theorem

Homolorphe Funktionen sind analytisch

Eine auf U holomorphe Funktion f ist um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwicklebar

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

die Koeffizienten a_ν sind eindeutig gegeben mit

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

γ einal positiv durchlaufender Kreis um z_0 mit Radius r

Beweis

Vorr:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Entwickeln nach $1/(\xi - z)$ in geometrische Reihe nach Potenzen von $|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}| < 1$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}} \frac{1}{\xi - z_0} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^\nu}{(\xi - z_0)^{\nu+1}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_k [\sum_{v=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu] d\xi$$

Beweis

Zeige Konvergenz: Für: $|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}| < 1$ konvergiert

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\xi-z_0)^{\nu+1}}$$

Vertauschen von Integral und Summe

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} [\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{\nu+1}} d\xi](z-z_0)^\nu$$

Abschätzung der Koeffizienten

Sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ein C^1 Weg; g : Spur$(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig
Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus$ Spur(γ), dann ist $\delta_{z_0} :=$dist(Spur$(\gamma), \{z_0\}) > 0$
$\Rightarrow ||g||_\infty :=sup(|g(\gamma(t))| : t \in [\alpha, \beta] < \infty$
$\Rightarrow ||\dot{\gamma}||_\infty :=sup(|\gamma(t)| : t \in [\alpha, \beta] < \infty$
Für $q = |\frac{z - z_0}{\xi - z_0}| < 1$ ist

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} |\frac{g(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)(z - z_0)^\nu}{(\gamma(t) - z_0)^{\nu+1}}| \leq \frac{||g||_\infty ||\dot{\gamma}||_\infty}{\delta_{z_0}} q^\nu$$

Nach Definition ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{g(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)(z-z_0)\nu}{(\gamma(t)-z)^{\nu+1}} dt = \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}} d\xi$$

Somit hat f auf offenem U eine konvergente Potenzreihenentwicklung
$\Rightarrow f$ ist *analytisch*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}} d\xi\right)(z-z_0)^{\nu}$$

Zusammenfassung I

u sei *harmonisch*
$\Rightarrow f = u_x + iu_y$ *holomorph*
$\Rightarrow f$ ist *complex diffbar und analytisch*
$\Rightarrow Re(f) + Im(f)$ sind *analytisch* (Majorante)
$\Rightarrow u$ ist *analytisch*
$\Rightarrow u$ ist beliebig oft differenzierbar

Zusemmenfassung II

Folgende Aussagen für f auf *offenem* U sind *äquivalent*:

- f ist *holomorph*
- f ist *reell diffbar und genügt den CR-Diff*
- f ist in eine Potenzreihe entwickelbar und damit analytisch
- f kann als kunjongierte harmonische Funktion geschrieben werden
- die kunjungierten hartmonischen Funktionen sind analytisch