

Minimalflächen

SS 2007

M. Fuchs

Literatur

F. J. Almgren, jr. Plateau's Problem — An Invitation to Varifold Geometry. *W. A. Benjamin Inc., Amsterdam, New York (1966)*.

[Hier findet man Zugang zu neueren Entwicklungen in der Minimalflächentheorie (geometrische Maßtheorie); das Buch ist sehr elementar, enthält viele schöne Bilder und ist zum Selbststudium zu empfehlen.]

H. Behnke, F. Sommer Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (3. Aufl.). *Grundl. math. Wiss. 77. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1965)*.

S. Bernstein Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. *Mathematische Zeitschrift 26*, 551–558 (1976).

[Originalarbeit, enthält den "Satz von Bernstein"; frei erhältlich unter <http://www.digizeitschriften.de/> (02.2007)]

L. Bers Riemann Surfaces. *New York Univ., Courant Inst. Math. Sci., New York (1958)*.

M. P. Do Carmo Differential Geometry of Curves and Surfaces. *Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1976)*.

[Standardwerk zur Differentialgeometrie.]

H. Cartan Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen. *B.I. Hochschultaschenbücher 112 a. Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim (1966)*.

R. Courant Dirichlet's Principle, Conformal Mappings and Minimal Surfaces (Reprint). *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977)*.

U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab Minimal Surfaces I & II. *Grundl. math. Wiss. 295. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1992)*.

H. Federer Geometric Measure Theory. *Grundl. math. Wiss. 153. Springer-Verlag New York Inc., New York (1969)*.

D. Gilbarg, N. S. Trudinger Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Second Ed.). Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **224**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1998).

A. G. Gray Differentialgeometrie — Klassische Theorie in moderner Darstellung. Spektrum Lehrbuch. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford (1994).

A. Haar Über das Plateausche Problem. Mathematische Annalen **97**, 124–158 (1927).

[Originalarbeit; frei erhältlich unter <http://www.digizeitschriften.de/> (02.2007)]

P. Hartman On the Bounded Slope Condition. Pacific Journal of Math. **18**, 495–511 (1966).

[Originalarbeit; frei erhältlich unter <http://projecteuclid.org> (02.2007)]

H. B. Lawson, jr. Lectures on Minimal Submanifolds Vol. 1. *Imperial College Press* (1972); *Publish or Perish* 1980.

[Als Übersicht für Interessenten mit geometrischen Vorkenntnissen empfohlen.]

K. Leichtweiß Minimalflächen im Großen. B. I. Überblicke Math. **2**. (1969).

U. Massari, M. Miranda Minimal Surfaces of Codimension One. North-Holland Math. Stud. **91**. North-Holland, Amsterdam (1984).

J. C. C. Nitsche Vorlesungen über Minimalflächen. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **199**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1975); auch erschienen als: Lectures on Minimal Surfaces Vol. 1 & 2. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).

[Schildert auf ca. 800 Seiten den Wissensstand der klassischen Minimalflächentheorie bezogen etwa auf 1970.]

R. Osserman A Survey of Minimal Surfaces. *Van Nostrand* (1969); *Dover Books on Adv. Math.*, *Dover Publ. Inc.*, New York (1986).

[Benötigt keine Vorkenntnisse aus der Differentialgeometrie oder Theorie der partiellen Differentialgleichungen.]

T. Radó On the Problem of Plateau. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **2**. Springer-Verlag, Berlin (1933).

L. Simon Lectures on Geometric Measure Theory. Proc. Centre Math. Anal. **3**. Australian National University (1983).

Inhalt

| | | |
|------------|---|----|
| § 0 | Einführung und historischer Überblick | 5 |
| § 1 | Graphenminimalflächen | 11 |
| § 2 | Lokale Beschreibung von Flächen | 21 |
| § 3 | Konforme Parametrisierungen und die Weierstraß-Darstellung | 35 |
| § 4 | Der Satz von Bernstein | 49 |
| § 5 | Folgerungen aus der Struktur der nichtparametrischen Minimalflächengleichung | 55 |
| § 6 | Das Dirichlet-Problem für die nichtparametrische Minimalflächengleichung | 67 |
| § 7 | Das Plateau-Problem für Minimalflächen vom Kreisscheibentypus | 83 |

§ 0

Einführung und historischer Überblick

Unter einer **Minimalfläche** $S \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir vorläufig folgendes verstehen.

DEFINITION

S ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit (= Fläche) des dreidimensionalen euklidischen Raums \mathbb{R}^3 , die den Flächeninhalt lokal minimiert.

Das heißt: Wählt man einen Punkt $p \in S$ und dazu eine Kugel $B_r(p) \in \mathbb{R}^3$ um p mit *genügend kleinem* Radius $r > 0$, so soll

$$\text{Area}_{B_r(p)}(S) \leq \text{Area}_{B_r(p)}(S')$$

für jede andere Fläche S' , die außerhalb der Kugel $B_r(p)$ mit S übereinstimmt, gelten (*Fig. 0.1*). Hierbei bezeichnet

$$\text{Area}_{B_r(p)}(S)$$

gerade den Flächenanteil von S , der innerhalb der Kugel $B_r(p)$ liegt. (Wir verzichten an dieser Stelle auf eine exakte Definition des Inhalts einer zweidimensionalen Fläche, und reichen diese später nach.)

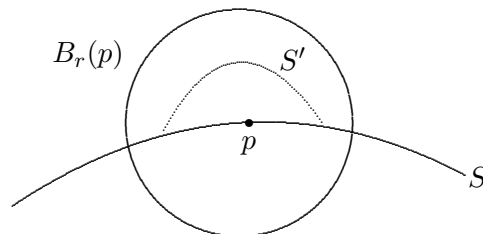


Fig. 0.1

Die Geschichte der Minimalflächen beginnt (vermutlich) 1762 mit J. L. Lagrange, der die folgende, heute als **Plateau-Problem** bekannte, Aufgabenstellung formulierte:

Gibt es zu einer gegebenen geschlossenen Jordan-Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, welche von Γ berandet wird und unter allen solchen Flächen kleinsten Inhalt hat?

Lagrange selbst lieferte folgenden Beitrag: Angenommen, das Problem hat eine Lösung S , von der man zusätzlich weiß, dass sie als Graph G_f einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ erklärt, also von der Form

$$S = \left\{ (u, v, f(u, v)) : (u, v) \in \Omega \right\} =: G_f$$

ist. Dann ist der Flächeninhalt von S gegeben durch

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv.$$

Betrachtet man nun irgendeine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω , so ist der Graph S_ε der Funktion $f + \varepsilon\varphi$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ eine Fläche mit demselben Rand wie S , so dass aus

$$\text{Area}(S) \leq \text{Area}(S_\varepsilon)$$

sofort

$$A_\Omega(f) \leq A_\Omega(f + \varepsilon\varphi)$$

folgt. Dies liefert insbesondere

$$\frac{d}{d\varepsilon} A_\Omega(f + \varepsilon\varphi) \Big|_0 = 0,$$

was gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$\int_\Omega (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \varphi \, du \, dv = 0,$$

welche mittels partieller Integration auf die folgende Gleichung führt.

Minimalflächengleichung in Graphenform:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (*)$$

Lagrange behandelte also das Plateau-Problem vom Standpunkt der **Variationsrechnung**: Man schränkt zunächst den Flächenbegriff auf eine überschaubare Teilklasse (nämlich die Graphen) ein und unterstellt, dass es in dieser Teilklasse Lösungen gibt. Für Graphen läßt sich der Flächeninhalt in einfacher Weise als Doppelintegral (“Variationsintegral”) aufschreiben und die Minimalität liefert als notwendige Bedingung das Verschwinden der sog. ersten Variation, und man bekommt den

SATZ

Wenn das Plateau-Problem lösbar ist und die Lösung zudem noch Graphen-gestalt hat, so erfüllt die den Graphen erzeugende Funktion die partielle Differentialgleichung (*).

Wir werden in § 1 die Schlussweise von Lagrange ausführlich diskutieren und eine genaue Herleitung von (*) geben.

Lagrange selbst hat sich nicht weiter mit dem Plateau–Problem beschäftigt, vielmehr ging es ihm wohl nur darum, mit diesem Beispiel die Macht des neuen Kalküls “Variationsrechnung” zu demonstrieren.

Allerdings ist eine explizite Lösung von (*) schon rund zwanzig Jahre vor Lagrange von Euler (um 1744) beschrieben worden. Euler stellte fest, dass die Kettenlinie bei der Rotation um ihre Achse eine Fläche kleinsten Inhalts erzeugt (das **Katenoid**, *Fig. 0.3*). Außerdem bewies Euler (mehr oder weniger), dass die Gültigkeit von (*) äquivalent ist zum Verschwinden der mittleren Krümmung H einer Fläche. Diese Beobachtung führt uns direkt in die **Differentialgeometrie**, nämlich auf das Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung. Bezüglich der Notation sei schon hier eine Warnung ausgesprochen: Aufgrund der historischen Entwicklung nennt man auch Flächen mit $H \equiv 0$ oftmals Minimalflächen — das Verschwinden von H ist jedoch lediglich notwendig, und keineswegs hinreichend für Minimalität bzgl. des Flächeninhalts.

Nach Euler und Lagrange findet man Beiträge von Bonnet, Riemann, Weierstraß, Enneper, Schwarz, Weingarten, Beltrami, Scherk und vielen anderen, die sich um das Auffinden von speziellen Lösungen von (*) und das Studium der Geometrie der expliziten Lösungen bemühten. Besondere Erwähnung verdienen die **Darstellungsforneln von Weierstraß** für Minimalflächen, die auf funktionentheoretischen Methoden beruhen.

Mit diesen Ergebnissen war man der Lösung des Plateau–Problems — also der Findung flächenminimaler Objekte bei gegebener Berandung — noch nicht näher gekommen. Erst Plateau (belgischer Physiker, 1801–1883) lieferte **experimentelle Ergebnisse**: Formt man etwa die Randkurve Γ aus sehr dünnem Draht und taucht dieses Gebilde in Seifenlauge, so zeigten Plateaus Untersuchungen zum Phänomen der Oberflächenspannung, dass der sich dann einstellende Seifenfilm eine Minimalfläche realisiert. Aufgrund dieser Experimente äußerte Plateau die von Geometern gestützte Vermutung, dass es zu jeder geschlossenen Jordankurve Γ eine eingespannte Minimalfläche geben muss.

Ein systematischer Zugang mit mathematisch exakten Methoden beginnt 1930 mit den Arbeiten von J. Douglas, T. Radó, R. Courant, die sich den **Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe** widmen:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe und $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ diffeomorphes Bild der Kreislinie ∂D . Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand Γ heißt vom Typ der Kreisscheibe, falls es eine reguläre Abbildung $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit $S = F(D)$, $F(\partial D) = \Gamma$.

Hierbei setzt man F als global injektiv voraus und verlangt, daß DF in jedem Punkt den maximal möglichen Rang (=2) hat. Setzt man die Parametrisierung F von S auch noch als **konform** voraus, d. h. ist

$$\partial_u F \cdot \partial_v F = 0, \quad |\partial_u F| = |\partial_v F|,$$

so folgt für den Flächeninhalt $A_D(F)$ des Bildes von F

$$A_D(F) = \frac{1}{2} \int_D |DF|^2 du dv,$$

d. h. der Flächeninhalt ist (bis auf den Faktor $1/2$) das sog. **Dirichlet-Integral** von F . In diesem Rahmen hat das Plateau-Problem folgende Formulierung:

Zur Randbedingung $F(\partial D) = \Gamma$ suche man eine konform parametrisierte Fläche $S = \text{Bild}(F)$, so dass F das Dirichlet-Integral minimiert.

Neben **Courant**, **Douglas**, **Radó** haben u. a. **Hildebrandt**, **Heinz** und **Nitsche** an der vollständigen Lösung mitgewirkt; eine befriedigende Lösung erfolgte erst in den 1960er und 1970er Jahren, wobei gleichzeitig einschränkend anzumerken ist, dass immer noch viele Detailfragen offen sind.

Die Suche nach Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe ist natürlich ein scheinbar allgemeinerer Lösungsansatz, als sich nur auf Graphenflächen zu beschränken, aber selbst wenn man eine Lösung vom D -Typ gefunden hat, bleibt offen, ob dies tatsächlich das Flächenminimum unter allen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand Γ ist. Tatsächlich könnte ja das Flächenminimum so aussehen:

Die in *Fig. 0.2* gezeichnete Fläche mit dem angesetzten Henkel ist nicht einfach zusammenhängend und deshalb nicht vom Typ D .

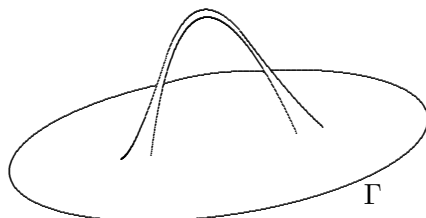


Fig. 0.2

Wir sehen daran, dass die klassischen Methoden, d. h. die Beschränkung der zur Diskussion stehenden Flächen auf einen fixierten Typ (Graph oder Kreisscheibe etc.) nicht in jedem Fall auf das absolute Flächenminimum führen muss, man bekommt vielmehr nur Flächen mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$, die nur in Spezialfällen absolut minimieren.

Dass die Vorgabe des topologischen Typs i. a. unrealistisch ist, zeigt in einfacher Weise das folgende

BEISPIEL

Die Randkurve Γ bestehe aus zwei koaxialen Kreislinien im \mathbb{R}^3 mit Abstand d . Dann

läßt sich zeigen: Für $d < d_0$ ist die Minimalfläche zum Rand Γ das Katenoid (Fig. 0.3), für $d > d_0$ bekommt man dagegen als Lösung die Vereinigung der beiden zu Γ gehörigen Kreisscheiben.

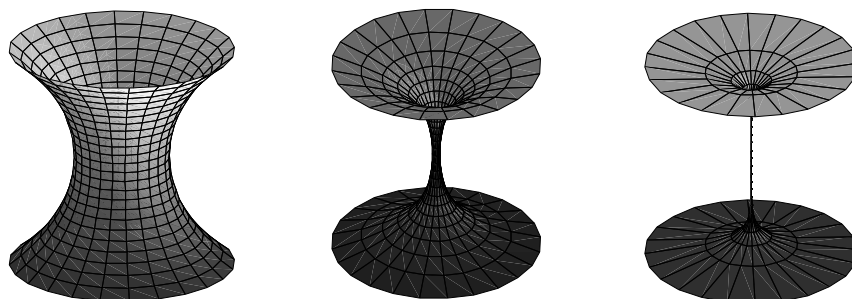


Fig. 0.3

Um die mit der Vorgabe einer Parametrisierung zusammenhängenden Probleme auszuräumen, haben Federer und Fleming Anfang der 1960er Jahre die sogenannte **Geometrische Maßtheorie** als neue Teildisziplin entwickelt, in der das Plateau-Problem als rein geometrische Variationsaufgabe in Klassen verallgemeinerter Mannigfaltigkeiten ohne Vorgabe einer Parametrisierung formuliert und gelöst werden kann. (Vgl. dazu [Almgren].) Der Zugang der geometrischen Maßtheorie ist Gegenstand einer eigenen Vorlesung; wir wollen uns hier mehr oder weniger mit dem Studium der Minimalflächen in Graphenform begnügen und einige bekannte Sätze beweisen. Aus dem bisher Gesagten geht hervor, dass die Minimalflächentheorie Beziehungen hat zur

Differentialgeometrie, Variationsrechnung, Theorie der partiellen Differentialgleichungen und Funktionentheorie.

Da Spezialkenntnisse aus diesen Gebieten nicht vorausgesetzt werden, geht es in den ersten Abschnitten um die Vorbereitung einiger Begriffe. Danach geben wir eine Herleitung von (*) und beschäftigen uns dann mit den Eigenschaften von Lösungen zu (*). Im letzten Teil dieser ersten Vorlesung geht es um die Frage, wie man Lösungen zu (*) erzeugt.

§ 1

Graphenminimalflächen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und sei $f \in C^1(\Omega)$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Graph wir mit G_f bezeichnen wollen. G_f ist eine Fläche (= 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3), deren Inhalt durch die Formel

$$A_\Omega(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv \quad (1.1)$$

gegeben ist. Hierbei steht $\nabla f(u, v)$ für den Vektor mit den Komponenten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right).$$

Die Formel (1.1) läßt sich auf zwei Wegen einsehen: Entweder man nimmt (1.1) einfach als Definition für den Flächeninhalt eines Graphen (schlecht, da nicht motiviert) oder man definiert auf \mathbb{R}^3 ein zweidimensionales geometrisches Maß (das Hausdorff-Maß \mathcal{H}^2) und zeigt, dass das Maß eines Graphen gerade durch die rechte Seite von (1.1) gegeben wird. Wir gehen einen Mittelweg, indem wir uns überlegen, dass

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv$$

den Flächeninhalt des Graphen vernünftig wiedergibt: Sei $Q = Q(a)$ ein *kleines* Quadrat in Ω mit Mittelpunkt a . Auf Q können wir $f(z)$ näherungsweise ersetzen durch die affine Funktion $\ell : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\ell(z) := f(a) + \nabla f(a) \cdot (z - a),$$

wobei $z := (u, v)$ ist. Es folgt in guter Näherung

$$A_Q(f) \approx A_Q(\ell),$$

d. h. die Fläche von G_f über Q entspricht in etwa der Fläche des Graphen von ℓ über Q . Wie groß ist nun aber $A_Q(\ell)$ bzw. welchen Wert wird man als sinnvolle Definition von $A_Q(\ell)$ ansehen? Dazu schreibe man

$$G_{\ell|_Q} = L(Q) + L_0 \quad \text{mit} \quad L_0 := (0, f(a) - a \cdot \nabla f(a)),$$

wobei $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch $Lz := (z, z \cdot \nabla f(z))$ gegebene lineare Funktion ist. Die Verschiebung L_0 sollte am zu definierenden Flächeninhalt des Graphen von $\ell|_Q$ nichts ändern, so dass wir letztendlich darauf geführt werden, der Menge $L(Q)$ einen Flächeninhalt zuzuordnen. Dazu nehmen wir o. E. an, dass Q achsenparallel ist und die linke untere Ecke gerade im Ursprung liegt:

$$\begin{aligned} Q &= \{se_1 + te_2 : 0 \leq s, t \leq \varepsilon\} = \{se'_1 + te'_2 : 0 \leq s, t \leq 1\}, \\ e_1 &:= (1, 0), \quad e_2 := (0, 1), \quad \varepsilon := \text{Kantenlänge von } Q, \\ e'_1 &:= (\varepsilon, 0), \quad e'_2 := (0, \varepsilon), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L(Q) &= \{sL(e_1) + tL(e_2) : 0 \leq s, t \leq \varepsilon\} = \{sf_1 + tf_2 : 0 \leq s, t \leq 1\} \\ f_1 &:= L(e'_1), \quad f_2 := L(e'_2). \end{aligned}$$

Somit ist $L(Q)$ das von den Vektoren f_1, f_2 aufgespannte Parallelogramm in der Ebene

$$E := \{(-\nabla f(a), 1)\}^\perp.$$

Bezeichnet f'_2 die orthogonale Projektion von f_2 auf das orthogonale Komplement von f_1 in E , so gilt bekanntlich

$$\text{Area } L(Q) = |f_1| |f'_2|.$$

Wegen

$$f'_2 = f_2 - \left(f_2 \cdot \frac{f_1}{|f_1|} \right) \frac{f_1}{|f_1|}$$

wird

$$\begin{aligned} |f_1|^2 |f'_2|^2 &= |f_1|^2 |f_2|^2 - (f_1 \cdot f_2)^2 = \varepsilon^4 \left(|Le_1|^2 |Le_2|^2 - (Le_1 \cdot Le_2)^2 \right) \\ &= \varepsilon^4 \left((1 + |\partial_u f(a)|^2) (1 + |\partial_v f(a)|^2) - (\partial_u f \cdot \partial_v f)^2(a) \right) \\ &= \varepsilon^4 (1 + |\nabla f(a)|^2). \end{aligned}$$

Deshalb gilt in guter Näherung

$$A_Q(f) \approx \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2} \text{Area}(Q).$$

Anschaulich ist klar, dass

$$A_\Omega(f) \approx A_{\bigcup_k Q_k}(f)$$

gelten muss, wenn man Ω mit n achsenparallelen Quadraten $Q_k = Q_k(a_k)$ ($k = 1, \dots, n$) überdeckt. Damit wird also

$$A_\Omega(f) \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + |\nabla f(a_k)|^2} \text{Area}(Q_k) \xrightarrow{n} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv$$

bei wachsender Güte n der Zerlegung von Ω in achsenparallele Quadrate.

Vermöge der vorstehenden Rechnung haben wir erkannt, dass

$$A_{\Omega}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, du \, dv$$

ein vernünftiger Ausdruck für die Fläche von G_f ist. Es sei ausdrücklich betont, daß $A_{\Omega}(f)$ durchaus gleich ∞ sein kann. Die Endlichkeit von $A_f(\Omega)$ ist zum Beispiel dann gesichert, wenn sowohl Ω als auch ∇f als beschränkt vorausgesetzt werden.

Nachfolgend seien f von der Klasse $C^2(\Omega)$ und $\varphi \in C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in einer offenen Kreisscheibe $D_r(z_0)$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$, d. h. es gelte

$$\text{spt } \varphi := \overline{\{z \in \Omega : \varphi(z) \neq 0\}} \subset D_r(z_0).$$

Wir schreiben dafür auch $\varphi \in C_0^2(D_r(z_0))$.

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig, so unterscheiden sich die Graphen G_f und $G_{f+\varepsilon\varphi}$ höchstens außerhalb des Zylinders $D_r(z_0) \times \mathbb{R}$. Minimiert nun G_f lokal den Flächeninhalt unter allen Graphen über Ω , so ist insbesondere

$$A_{D_r(z_0)}(f) \leq A_{D_r(z_0)}(f + \varepsilon\varphi),$$

und damit folgt

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_0 \int_{D_r(z_0)} \left(1 + |\nabla f + \varepsilon\nabla\varphi|^2\right)^{1/2} \, du \, dv = 0,$$

was nach Differentiation unter dem Integralzeichen äquivalent ist zu

$$\int_{D_r(z_0)} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \varphi \, du \, dv = 0.$$

Schreibt man

$$\begin{aligned} & (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \varphi \\ &= \text{div} \left(\varphi (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right) - \text{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right) \varphi \end{aligned}$$

und beachtet, dass nach dem Satz von Gauß

$$\int_{D_r(z_0)} \text{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \varphi \right) \, du \, dv = 0$$

ist, erhält man die Gleichung

$$\int_{D_r(z_0)} \text{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right) \varphi \, du \, dv = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^2(D_r(z_0)).$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Größe

$$\text{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right)$$

auf $D_r(z_0)$ verschwindet. Da im Falle der lokalen Minimalität dies für jede Kreisscheibe $D_r(z_0)$ richtig sein muss, ist bewiesen:

SATZ 1.1

Sei $f \in C^2(\Omega)$ mit

$$A_{\Omega'}(f) \leq A_{\Omega'}(g)$$

für jedes kompakt in Ω enthaltene Teilgebiet Ω' (kurz: $\Omega' \Subset \Omega$) und jede Funktion $g \in C^2(\Omega)$ mit $\text{spt}(f - g) \subset \Omega'$. Dann löst f die sog. **explizite (oder nichtparametrische) Minimalflächengleichung**

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

□

Bezeichnet Δf den Laplace-Operator

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f,$$

so läßt sich die explizite Minimalflächengleichung auch schreiben als

$$(1 + |\nabla f|^2) \Delta f = D^2 f(\nabla f, \nabla f),$$

wobei $D^2 f(\nabla f, \nabla f)$ die Anwendung der symmetrischen Bilinearform $D^2 f$ auf das Paar $(\nabla f, \nabla f)$ bedeutet. Ausgeschrieben lautet das Ergebnis:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0,$$

und man sieht, dass es sich um eine **nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung** handelt.

Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, bedeutet die nichtparametrische Minimalflächengleichung geometrisch, dass G_f eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung H ist. Im Falle von allgemeinen Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ bedeutet $H \equiv 0$ jedoch keineswegs, dass S den Flächeninhalt zu seinem Rand minimiert. (Das ist wie in der gewöhnlichen Extremwertrechnung: das Verschwinden der Ableitung garantiert noch nicht, dass man eine Minimalstelle gefunden hat.) Anders verhält es sich, wenn man die zusätzliche Information hat, dass die betrachtete Fläche S ein Graph ist. Genauer gilt:

SATZ 1.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und sei $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Ferner bezeichne M eine (orientierte) C^2 -Mannigfaltigkeit mit

- (i) $M \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ und
- (ii) $\partial M = G_f|_{\partial\Omega}$.

Dann ist

$$A_{\Omega}(f) \leq \operatorname{Area}(M).$$

KOROLLAR

Ist f wie oben und $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit $g = f$ auf $\partial\Omega$, so folgt

$$A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g).$$

BEMERKUNG

Ist Ω nicht konvex, so findet man unter Umständen zweidimensionale Mannigfaltigkeiten M mit

$$\partial M = G_f|_{\partial\Omega}$$

und $M \not\subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, für die $\text{Area}(M) < A_\Omega(f)$ ist. Satz 1.2 bezieht sich deshalb also nur auf Vergleichsmannigfaltigkeiten M , die innerhalb des Zylinders $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ gelegen sind.

BEWEIS VON SATZ 1.2

Zunächst stehen wir vor dem technischen Problem, den Flächeninhalt $\text{Area}(M)$ einer C^2 -Mannigfaltigkeit erklären zu müssen. Da diese Einzelheiten zu weit führen würden, sollte man entweder auf alte Analysiskenntnisse zurückgreifen ("Oberflächenmaß") oder wie folgt argumentieren: Für Graphen haben wir uns eine Inhaltsformel überlegt und kennen damit auch den Inhalt von Flächen, die durch Rotation und Translation aus Graphen erzeugt werden. Jede Mannigfaltigkeit M setzt sich aber aus abzählbar vielen Stücken zusammen, die isometrisch zu gewöhnlichen Graphen sind. Durch Zusammensetzen bekommt man schließlich eine Definition für $\text{Area}(M)$. Um wenigstens einen Eindruck von der Beweisidee zu bekommen, setzen wir $N := G_f$ und stellen uns die Situation wie in *Fig. 1.1* gezeichnet vor.

Sind u, v wie üblich die Variablen in \mathbb{R}^2 und bezeichnet w die noch fehlende Ortskoordinate des \mathbb{R}^3 , so ist

$$\nu_N(u, v) := (-\nabla f(u, v), 1) / \sqrt{1 + |\nabla f(u, v)|^2}$$

in jedem Punkt $(u, v) \in \bar{\Omega}$ ein Vektor senkrecht zu N im Punkt $(u, v, f(u, v))$.

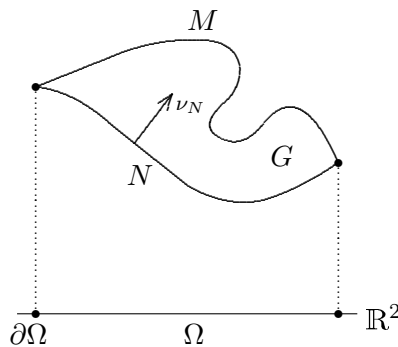


Fig. 1.1

Durch $F(u, v, w) := \nu_N(u, v)$ gewinnen wir ein Vektorfeld auf dem ganzen Zylinder

$\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. Man stellt nun fest, dass f die nichtparametrische Minimalflächengleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times \mathbb{R}$$

ist. Es gibt daher ein Vektorfeld $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F = \operatorname{rot} \Phi$. Damit wird wegen

$$F = \nu_N \text{ auf } N, \quad |F| = 1$$

und mit dem Satz von Stokes (τ_N bezeichne das Einheitstangentenfeld an ∂N und \mathcal{H}^k das k -dimensionale Hausdorff-Maß)

$$\begin{aligned} \operatorname{Area}(N) &= \int_N d\mathcal{H}^2 = \int_N \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_N d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial N} \Phi \cdot \tau_N d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial M} \Phi \cdot \tau_M d\mathcal{H}^1 \\ &= \int_M \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_M d\mathcal{H}^2 = \int_M F \cdot \nu_M d\mathcal{H}^2 \leq \operatorname{Area}(M) \end{aligned}$$

Dabei haben wir unterstellt, dass die Vergleichsfläche M orientiert ist, was für die Existenz des Einheitsnormalenfeldes ν_M notwendig ist.

Wenn man auf den Satz von Stokes verzichten möchte, läßt sich der Beweis auch mit dem Satz von Gauß führen, wobei allerdings auch wieder an die Anschauung appelliert werden muss: Wir unterstellen, dass M und N Rand eines Gebietes G (Fig. 1.1) sind und dass sich der Gauß-Satz auf G anwenden läßt. Mit den Notationen von oben ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \operatorname{div} F \, du \, dv \, dw = \int_{\partial G} F \cdot \nu_G d\mathcal{H}^2 = \int_N F \cdot \nu_N d\mathcal{H}^2 + \int_M F \cdot \nu_M d\mathcal{H}^2 \\ &= \operatorname{Area}(N) + \int_M F \cdot \nu_M d\mathcal{H}^2, \end{aligned}$$

woraus mit $F \cdot \nu_M \geq -1$ die Behauptung folgt. Die Minimalflächengleichung ist hier wieder nur in der Form $\operatorname{div} F = 0$ eingegangen. \square

Bis jetzt haben wir noch keine Minimalfläche explizit konstruiert. Unser Fernziel ist natürlich die Lösung des

Plateau-Problem für Graphenminimalflächen:

Zu einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, die Graph über dem Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist, finde man $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (i) $\Gamma = G_{f|_{\partial\Omega}}$,
- (ii) $A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g)$ für alle $g \in \mathcal{G}$,

wobei $\mathcal{G} := \{g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; \Gamma = G_{g|_{\partial\Omega}}\}$ ist.

Anschaulich würde man so vorgehen: Man wählt eine (Minimal-) Folge (f_n) mit

$$A_\Omega(f_n) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f_n|^2} \, dx \, dy \xrightarrow{n} \inf_{g \in \mathcal{G}} A_\Omega(g)$$

in der Hoffnung, aus (f_n) eine konvergente Teilfolge auswählen zu können, die natürlich gegen die gesuchte Lösung konvergieren sollte. Dieser Zugang mit Variationsmethoden ist jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden, so dass wir zunächst dem historischen Weg folgen, und durch spezielle Ansätze Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung erzeugen.

Wir suchen also Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

1. Ebenen:

Für $A \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\ell(u, v) := A \cdot (u, v) + a,$$

also eine affin-lineare Funktion auf \mathbb{R}^2 , deren Graph G_ℓ eine Ebene in \mathbb{R}^3 darstellt. Natürlich ist ℓ Lösung der Minimalflächengleichung, und ein tiefer auf **Bernstein** zurückgehender Satz besagt, dass ℓ auch die einzige ganze (= auf der ganzen Ebene definierte) Lösung der Minimalflächengleichung ist. Das werden wir später beweisen.

2. Erste Scherk-Fläche:

Man sucht Lösungen f der Form

$$f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$$

mit noch zu bestimmenden reellen Funktionen von einer reellen Variablen. Die Minimalflächengleichung reduziert sich auf

$$(1 + \psi'(v)^2) \varphi''(u) + (1 + \varphi'(u)^2) \psi''(v) = 0$$

bzw.

$$\varphi''(u) / (1 + \varphi'(u)^2) = -\psi''(v) / (1 + \psi'(v)^2).$$

Da die linke Seite nur von u , die rechte nur von v abhängt, folgt die Konstanz der Ausdrücke, so dass wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\rho'' = c(1 + (\rho')^2) \quad (c \in \mathbb{R})$$

zu lösen haben. Mit der Substitution $\lambda := \rho'$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\lambda' = c(1 + \lambda^2),$$

und unter Beachtung von $\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$ folgt

$$\lambda(t) = \tan(ct + d).$$

Integriert man λ und kehrt zurück zu $f(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$, so bekommt man die allgemeine Lösung

$$f(u, v) = \frac{1}{a} \log \frac{\cos a(u - u_0)}{\cos a(v - v_0)} + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

Die durch

$$f(u, v) = \log \frac{\cos u}{\cos v}$$

gelieferte Fläche heißt **Scherk's erste Fläche** (Fig. 1.2). Als möglichen Definitionsbereich findet man das Schachbrett

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u - k\pi| < \pi/2, |v - \ell\pi| < \pi/2, k + \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade}\}.$$

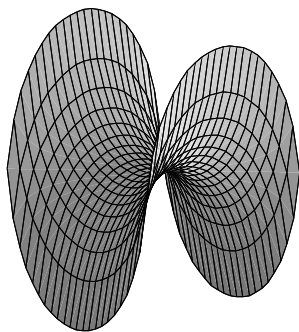


Fig. 1.2

3. Der Ansatz

$$\partial^2 f / \partial u^2 \equiv 0$$

führt auf die Bestimmungsgleichung

$$f(u, v) = au \varphi(v) + \psi(v)$$

mit reellen Funktionen φ , ψ und $a \in \mathbb{R}$. Ist $a = 0$, so reduziert sich die Minimalflächengleichung auf $\psi'' \equiv 0$, d. h.

$$f(u, v) = cv + d \quad (c, d \in \mathbb{R})$$

und den Fall affin-linearer f haben wir schon unter 1. beschrieben. Sei deshalb $a \neq 0$. Dann ist die Minimalflächengleichung äquivalent zu

$$(1 + a^2 \varphi^2(v))(au \varphi''(v) + \psi''(v)) = 2a^2 \varphi(v) \varphi'(v) (au \varphi'(v) + \psi'(v))$$

$$\iff$$

$$\psi''(v)(1 + a^2 \varphi^2(v)) + au \varphi''(v)(1 + a^2 \varphi^2(v)) = 2a^2 \varphi(v) \varphi'(v) \psi'(v) + 2a^3 u \varphi(v) \varphi''(v)^2,$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$2a^2 \varphi(v) \varphi'(v) \psi'(v) = (1 + a^2 \varphi^2(v)) \psi'(v), \tag{1.2}$$

$$2a^3 \varphi(v) \varphi(v)^2 = (1 + a^2 \varphi^2(v)) a \varphi''(v).$$

Dies wiederum ist, wenn φ' und ψ' nullstellenfrei sind gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \psi'' / \psi' &= 2a^2 \varphi' \varphi / (1 + a^2 \varphi^2) \\ \varphi'' / \varphi' &= 2a^2 \varphi' \varphi / (1 + a^2 \varphi^2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Man rechnet nun nach, dass die zweite Gleichung in (1.3) umgeformt werden kann zu

$$0 = \left(\frac{\varphi'}{a^2\varphi^2 + 1} \right)' = \left(\frac{1}{a} \arctan(a\varphi) \right)'' \quad (1.4)$$

Damit muss also

$$\arctan(a\varphi) = abv + ac \quad (b, c \in \mathbb{R})$$

sein. Schreibt man b statt ab und c statt ac , so erhält man als allgemeine Lösung von (1.3), (1.4)

$$\varphi(y) = \frac{1}{a} \tan(bv + c).$$

Gleichzeitig liefert (1.3) $\psi''/\psi' = \varphi''/\varphi'$, so dass $(\psi'/\varphi)'' = 0$ sein muss. Mithin ist $\psi' = c_1\varphi'$ oder $\psi = c_1\varphi + c_2$. Setzt man die Ergebnisse zusammen, so findet man mit Integrationskonstanten $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, u_0, v_0$

$$f(u, v) = \tilde{a}(u - u_0) \tan(\tilde{b}(v - v_0)) + \tilde{c}.$$

Der Graph G_f von f stimmt bis auf Streckungen und Verschiebungen mit dem der Funktion

$$(u, v) \rightarrow \alpha u \tan v$$

überein (Fig. 1.3).

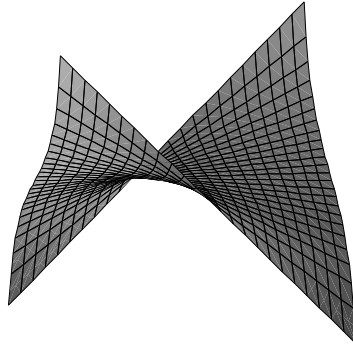


Fig. 1.3

4. Von **Scherk** stammt der Ansatz, Graphenminimalflächen mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f / \partial u}{(1 + |\nabla f|^2)^{1/2}} \right) = 0 = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f / \partial v}{(1 + |\nabla f|^2)^{1/2}} \right)$$

zu suchen. Offenbar ergibt vorstehende Gleichung sofort

$$\operatorname{div} \left(\nabla f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right) = 0.$$

Der Ansatz impliziert, dass

$$\varphi := \partial f / \partial u (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}, \quad \psi := \partial f / \partial v (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}$$

nur Funktionen von v bzw. u sind. Außerdem gilt

$$\varphi^2 + \psi^2 = (1 + |\nabla f|^2)^{-1} |\nabla f|^2 \quad \implies \quad \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2} = 1 / \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

so dass wir

$$\partial f / \partial u = \varphi / \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2}, \quad \partial f / \partial v = \psi / \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2}$$

schreiben können. Nun benutzt man die Symmetrie $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ und findet:

$$\psi'(1 - \varphi^2 - \psi^2) + \psi^2 \psi' = \varphi'(1 - \varphi^2 - \psi^2) + \varphi' \varphi^2.$$

Daraus folgt für alle u, v die Beziehung

$$\psi'(u) / (1 - \psi^2(u)) = \varphi'(v) / (1 - \varphi^2(v)),$$

was nur dann möglich ist, wenn für $a \in \mathbb{R}$

$$\psi'(u) / (1 - \psi^2(u)) \equiv a, \quad \varphi'(v) / (1 - \varphi^2(v)) \equiv a$$

erfüllt ist. Lösungen davon sind

$$\varphi(v) = \tanh a(v - v_0), \quad \psi(u) = \tanh a(u - u_0).$$

Für $a = 1$ und $(u_0, v_0) = (0, 0)$ erhält man (*Fig. 1.4*):

$$f(u, v) = \arcsin(\sinh u \sinh v).$$

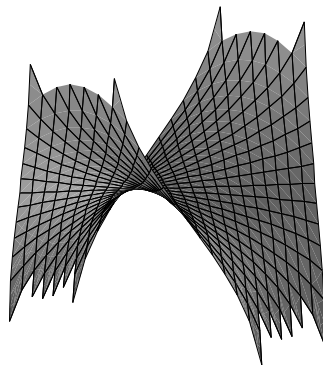


Fig. 1.4

□

Mit diesen Beispielen zu expliziten Lösungen der Minimalflächengleichung in Graphenform wollen wir es bewenden lassen. Natürlich hat man sich im vorigen Jahrhundert ausgiebig bemüht, möglichst viele konkrete Minimalflächen, die nicht notwendig Graphen über ebenen Gebieten sind, zu bestimmen. Dies geschieht durch Verknüpfen der notwendigen Bedingung $H \equiv 0$ mit gewissen Symmetrieanahmen. Eine Übersicht über die so erzeugten klassischen Minimalflächen (z. B. das Katenoid) findet man mit den entsprechenden Rechnungen in den Kapiteln “Spezielle Minimalflächen” bei [Nitsche] oder [Lawson].

§ 2

Lokale Beschreibung von Flächen

Dieser Abschnitt enthält die allgemeine Definition von Flächen in \mathbb{R}^3 als zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten und gibt eine Übersicht über elementare geometrische Konzepte wie Tangentialraum, Krümmung, etc. (Als Quelle zum Selbststudium empfehlen wir das Buch von [Do Carmo].)

DEFINITION

Eine Teilmenge S von \mathbb{R}^3 heißt Fläche der Differenzierbarkeitsklasse C^r ($r \in \mathbb{N}$), falls es zu jedem $p \in S$ offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $F : U \rightarrow V$ gibt, so dass folgende Aussagen gelten:

- (i) F ist von der Klasse C^r .
- (ii) $F(U) = S \cap V$.
- (iii) F ist injektiv.
- (iv) $DF(u, v)$ hat in allen $(u, v) \in U$ den maximalen Rang 2.

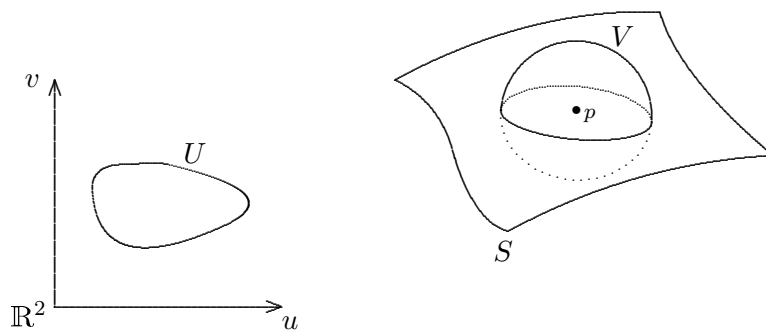


Fig. 2.1

Man nennt F eine **lokale Parametrisierung** oder ein **lokales Koordinatensystem** von S bei p .

Bedingung (iv) besagt, dass die Vektoren $\partial_u F(u, v), \partial_v F(u, v) \in \mathbb{R}^3$ an jeder Stelle $(u, v) \in U$ linear unabhängig sein müssen. Folglich kann man sich eine Fläche S lokal so vorstellen, dass man sie durch Verbiegen eines kleinen Stücks der Ebene (durch F) erzeugt. Die Injektivität von F schließt Selbstdurchschneidungen der Fläche S aus.

BEISPIEL

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^r(\Omega)$. Dann ist der Graph G_f von f eine Fläche der Klasse C^r , die sogar eine globale Parametrisierung, nämlich die Graphenabbildung

$$\Omega \ni (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3,$$

besitzt.

Verbunden mit dem Flächenbegriff ist das geometrische Konzept der Tangentialebene.

DEFINITION

Ein Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ heißt Tangentenvektor an die Fläche S im Punkt p , wenn es eine Kurve γ in S gibt mit

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = \eta.$$

Die Menge aller Tangentenvektoren an S in p bezeichnen wir mit $T_p S$.

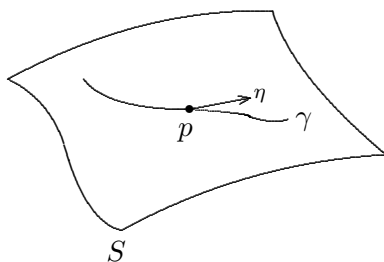


Fig. 2.2

Eine einfache Überlegung zeigt:

LEMMA 2.1

Sei S eine Fläche, $p \in S$ und F eine lokale Parametrisierung von S bei p mit $F(u_0, v_0) = p$. Dann gilt:

- (a) $T_p S$ ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^3 , genannt **Tangentialebene** an die Fläche in p .
- (b) $T_p S$ wird aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\partial_u F(u_0, v_0)$, $\partial_v F(u_0, v_0)$, also

$$T_p S = DF(u_0, v_0)(\mathbb{R}^2).$$

BEWEIS Übungsaufgabe!

Ist F wie oben eine lokale Parametrisierung bei $p \in S$, so gilt:

$$\partial_u F(u, v) \times \partial_v F(u, v) \in [T_{F(u,v)} S]^\perp$$

für alle Punkte (u, v) aus dem Definitionsbereich von F . Mit anderen Worten: Ist $q \in S$ nahe bei p , so wird durch

$$\mathcal{N}(q) := \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{|\partial_u F \times \partial_v F|}$$

ein **lokales Normalenfeld** von S bei p erklärt.

Eine interessante geometrische Frage ist, ob man eine Fläche S stets mit einem globalen Normalenfeld $\bar{\mathcal{N}}$ versehen kann, d. h. $\bar{\mathcal{N}}$ hängt stetig vom Fußpunkt p ab und erfüllt $|\bar{\mathcal{N}}(p)| = 1$ sowie $\bar{\mathcal{N}}(p) \in (T_p S)^\perp$ für alle $p \in S$. Das Beispiel des Möbiusbandes (*Fig. 2.3*) zeigt, dass globale Normalenfelder nicht existieren müssen. Vielmehr ist diese Eigenschaft äquivalent zur **Orientierbarkeit** von S .

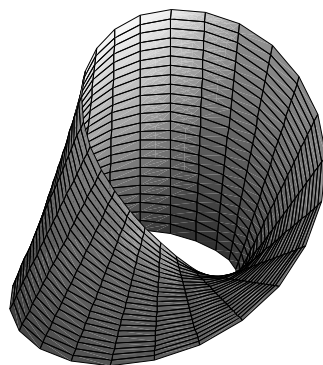


Fig. 2.3

□

Im Falle eines Graphen $S = G_f$ kann man sofort ein (globales) Normalenfeld aufschreiben:

$$(-\nabla f(u, v), 1) / \sqrt{1 + |\nabla f(u, v)|^2};$$

man nennt dieses das kanonische “nach oben zeigende” Einheitsnormalenfeld der Graphenfläche.

Uns interessieren im Folgenden nur lokale Eigenschaften von Flächen, deshalb können wir uns direkt auf den Fall beschränken, dass

$$S = F(\Omega)$$

gilt mit einer regulären Parametrisierung $F : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei F injektiv und r -mal stetig differenzierbar und $\partial_u F \times \partial_v F \neq 0$ ist. (Offenbar bedeutet letzteres gerade, dass das Differential von F überall Rang 2 hat.)

Für diesen Fall wollen wir uns überlegen, dass

$$\text{Area}(S) := \int_{\Omega} |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv$$

eine sinnvolle Definition für den Flächeninhalt von S ergibt.

Wie bei Graphen zerlegt man Ω in kleine achsenparallele Quadrate Q und ersetzt dort $F(u, v)$ durch die affin lineare Approximation

$$L(u, v) = F(u_0, v_0) + DF(u_0, v_0)(u - u_0, v - v_0).$$

Dann entspricht das Flächenstück $F(Q)$ dem Anteil $L(Q)$, und genau wie vorhin erhält man

$$|Q| \left(|\partial_u F(u_0, v_0)|^2 |\partial_v F(u_0, v_0)|^2 - (\partial_u F(u_0, v_0) \partial_v F(u_0, v_0))^2 \right)^{1/2}$$

für den Flächeninhalt von $L(Q)$. Wegen

$$\left(\dots \right)^{1/2} = |\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)|$$

folgt durch Approximation die angestrebte Beziehung.

DEFINITION

Es sei $S = F(\Omega)$ eine reguläre parametrisierte Fläche. Dann heißt

$$\text{Area}(S) := \int_{\Omega} |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv$$

der **Flächeninhalt** von S .

BEMERKUNG (Parameterinvarianz)

Ist $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus des Gebietes $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ auf Ω , so parametrisiert $\tilde{F} := F \circ \varphi$ natürlich auch die Fläche S . Die bekannte Transformationsregel für Integrale ergibt

$$\int_{\Omega} |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv = \int_{\Omega'} |\partial_u \tilde{F} \times \partial_v \tilde{F}| \, du \, dv,$$

d. h. $\text{Area}(S)$ hängt nicht von der speziell gewählten Parametrisierung ab. (Für eine allgemeine Definition des Flächeninhalts, die nicht an eine Parametrisierung von S geknüpft ist, vergleiche man [Do Carmo], Kapitel 2.8.) \square

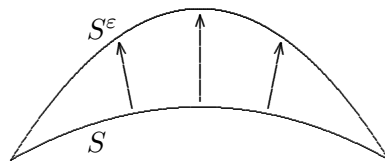


Fig. 2.4

Sei $S = F(\Omega)$ eine regulär parametrisierte Fläche. Anschaulich (wie auch bei den Graphen) nennt man S lokal flächenminimal, wenn gilt:

$$\text{Area}(S) \leq \text{Area}(\tilde{S})$$

für jede Fläche $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$, die sich von S nur innerhalb einer kleinen Kugel unterscheidet, die den Rand von S nicht trifft. Solche Vergleichsflächen \tilde{S} kann man wie folgt erzeugen: Für $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \equiv 0$ nahe $\partial\Omega$ und $|\varepsilon|$ genügend klein ist

$$F^\varepsilon(u, v) := F(u, v) + \varepsilon \varphi(u, v) \mathcal{N}(u, v)$$

reguläre Parametrisierung einer Fläche S^ε , die durch normale Verschiebung aus S entsteht (Fig. 2.4). Die notwendige Bedingung für Minimalität lautet:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 \text{Area}(S^\varepsilon) = 0,$$

und wir wollen nachfolgend dieser Gleichung einen geometrischen Gehalt geben. Dies führt uns zwangsläufig auf den

Krümmungsbegriff für Flächen:

Sei $S = F(\Omega)$, $F : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, eine regulär parametrisierte Fläche und $p \in S$ beliebig. Anschaulich wird man die Krümmung von S bei p durch die Änderung des Normalenfeldes \mathcal{N} messen wollen, die entsteht, wenn man auf S längs einer Kurve γ

durch p fortschreitet.

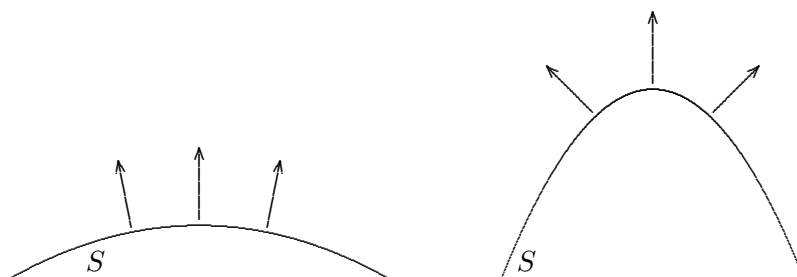


Fig. 2.5

Das heißt präzise: Große Krümmung liegt vor, wenn \mathcal{N} seine Richtung bei p schnell verändert, die Krümmung ist dagegen fast 0, wenn \mathcal{N} — wie bei einer Ebene — nahezu konstant bleibt (Fig. 2.5).

Um zu einer Definition zu gelangen, wählen wir ein $\tau \in T_p S$ sowie eine Kurve γ in S mit $\gamma(0) = p$ sowie $\dot{\gamma}(0) = \tau$. Dann ist $t \mapsto \mathcal{N}(\gamma(t))$ eine Kurve auf der Sphäre S^2 mit $\mathcal{N}(\gamma(0)) = \mathcal{N}(p)$ und

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathcal{N}(\gamma(t)) \perp \mathcal{N}(p).$$

Die letzte Beziehung besagt nun gerade

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathcal{N}(\gamma(t)) \in T_p S.$$

Da die Bildung $\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathcal{N}(\gamma(t))$ nicht von der speziellen Wahl der Kurve γ abhängt (sofern diese $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$ erfüllt) und die Zuordnung

$$T_p S \ni \tau \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_0 \mathcal{N}(\gamma(t)) \in T_p S$$

zudem linear ist, vergibt man folgende

BEZEICHNUNG

Das Normalenfeld $\mathcal{N} : S \rightarrow S^2$ der Fläche S heißt **Gauß–Abbildung** von S . Die oben in jedem Punkt $p \in S$ erklärte lineare Abbildung $T_p S \rightarrow T_p S$ heißt das **Differential** in p der Gauß–Abbildung, i. Z. $d\mathcal{N}_p$.

ANMERKUNG

- (1) Da \mathcal{N} nur auf S erklärt ist, läßt sich die Gauß–Abbildung nicht im üblichen Sinn ableiten, man kann lediglich längs Kurven in S differenzieren.
- (2) Offenbar ist $d\mathcal{N}_p$ ein Gradmesser für das Krümmungsverhalten der Fläche S .

LEMMA 2.2

Das Differential $d\mathcal{N}_p$ ist eine **selbstadjungierte** lineare Abbildung $T_pS \rightarrow T_pS$.

BEWEIS

Eine lineare Abbildung $A : T_pS \rightarrow T_pS$ heißt selbstadjungiert (oder auch symmetrisch), wenn

$$A(\tau) \cdot \eta = \tau \cdot A(\eta)$$

für alle Vektoren $\tau, \eta \in T_pS$ ist. (Hierbei steht “ \cdot ” für das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 .)

Sei F wie üblich die Parametrisierung von S und $\alpha(t)$ eine Kurve in S mit $\alpha(0) = p$. Schreibt man

$$\alpha(t) = F(\beta(t))$$

mit einer geeigneten ebenen Kurve $\beta(t) := (\beta_1(t), \beta_2(t))$ im Definitionsgebiet von F , so folgt:

$$\begin{aligned} d\mathcal{N}_p(\dot{\alpha}(0)) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \mathcal{N}(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 (\mathcal{N} \circ F)(\beta(t)) \\ &= \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u}(\beta(0)) \beta'_1(0) + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial v}(\beta(0)) \beta'_2(0), \end{aligned}$$

wobei u, v die Variablen im Definitionsgebiet von F bezeichnen, und $N := \mathcal{N} \circ F$ ist. Für die speziellen Tangentenvektoren ($p := F(u_0, v_0)$)

$$\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, v_0) =: \tau_1, \quad \frac{\partial}{\partial v} F(u_0, v_0) =: \tau_2$$

ergibt sich $(\beta(t) = (u_0, v_0) + t(1, 0)$ bzw. $(u_0, v_0) + t(0, 1))$

$$d\mathcal{N}_p(\tau_1) = \frac{\partial}{\partial u} N(u_0, v_0), \quad d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \frac{\partial}{\partial v} N(u_0, v_0).$$

Nun ist $d\mathcal{N}_p$ linear und jeder Tangentenvektor $\tau \in T_pS$ eine Linearkombination von τ_1, τ_2 . Die Symmetrie von $d\mathcal{N}_p$ ergibt sich demnach, wenn man

$$\tau_1 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \tau_2 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_1) \tag{2.1}$$

verifizieren kann. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tau_1 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_2) &= \frac{\partial}{\partial u} F(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial}{\partial v} N(u_0, v_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} F \cdot N \right) (u_0, v_0) - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} (u_0, v_0) = -\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} (u_0, v_0), \end{aligned}$$

denn $\frac{\partial F}{\partial u}$ ist tangential, und somit senkrecht zu N . Die Symmetrie der zweiten Ableitung liefert

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} (u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} (u_0, v_0),$$

und durch analoge Rechnung folgt

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) = \tau_2 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_1),$$

also ist (2.1) bewiesen. \square

DEFINITION

Die durch

$$II_p(\xi, \eta) := -d\mathcal{N}_p(\xi) \cdot \eta$$

auf $T_p S$ definierte symmetrische Bilinearform heißt die **zweite Fundamentalfom** von S bei p .

BEMERKUNG

- (1) Das Minuszeichen in der Definition hat historische Gründe.
- (2) II_p ist eng an die Wahl des kanonischen Normalenfeldes geknüpft, d. h. ersetzt man \mathcal{N} durch $-\mathcal{N}$ (Umkehr der Orientierung), so ändert II_p das Vorzeichen. Aus diesem Grund betrachtet man oft die

Vektorielle zweite Fundamentalform:

$$\begin{aligned} \tilde{II}_p : T_p S \times T_p S &\rightarrow [T_p S]^\perp, \\ (\xi, \eta) &\mapsto -d\mathcal{N}_p(\xi) \cdot \eta \mathcal{N}(p), \end{aligned}$$

die offensichtlich invariant ist gegen Änderungen der Orientierung. Außerdem ist \tilde{II}_p nicht an die Existenz von globalen Normalenfeldern geknüpft, und kann daher für beliebige C^2 -Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 eingeführt werden.

Wir geben noch eine (vgl. [Do Carmo], S. 16 f. und S. 142 f.)

Geometrische Interpretation von II_p :

Seien $p \in S$ und $\xi \in T_p S$ mit $|\xi| = 1$. Man wählt eine Kurve $\alpha(t)$ in S mit

$$\alpha(0) = p, \quad \dot{\alpha}(0) = \xi \quad \text{und} \quad |\dot{\alpha}(t)| \equiv 1$$

(Parametrisierung nach der Bogenlänge). Wegen $\mathcal{N}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0$ wird

$$II_p(v, v) = -d\mathcal{N}_p(v) \cdot v = -\frac{d}{dt}\bigg|_0 \mathcal{N}(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(0) = \mathcal{N}(0) \cdot \ddot{\alpha}(0),$$

wobei $\ddot{\alpha}(0)$ bekanntlich der Krümmungsvektor an α zur Zeit 0 ist, so dass $II_p(v, v)$ den Krümmungsvektor senkrecht zur Fläche S angibt. \square

Kehren wir zurück zum Differential $d\mathcal{N}_p$ der Gauß-Abbildung: Die Symmetrie der linearen Abbildung ergibt sofort (vgl. [Do Carmo], S. 216)

LEMMA 2.3

Es gibt eine orthonormale Basis ξ, η in $T_p S$, bestehend aus Eigenvektoren von $d\mathcal{N}_p$, d. h.

$$d\mathcal{N}_p(\xi) = -k_1\xi, \quad d\mathcal{N}_p(\eta) = -k_2\eta,$$

wobei die Vorzeichenwahl für die Eigenwerte $-k_1, -k_2$ wieder historische Gründe hat.

DEFINITION

Die negativen Eigenwerte k_1, k_2 heißen **Hauptkrümmungen**, die zugehörigen Vektoren ξ, η entsprechend **Hauptkrümmungsrichtungen** von S bei p . Man bekommt k_1, k_2 als Extremwerte von

$$\{w \in T_p S : |w| = 1\} \ni v \mapsto II_p(v, v).$$

Man nennt

$$H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{spur} d\mathcal{N}_p$$

die **mittlere Krümmung** S bei p und

$$K := k_1 k_2 = \det d\mathcal{N}_p$$

die **Gauß-Krümmung** von S bei p .

BEMERKUNG

Wir betrachten zur Vereinfachung nur global parametrisierte Flächen $S = F(\Omega)$ und beziehen uns stets auf das Normalenfeld $\mathcal{N}(p)$. Insbesondere ändert $H(p)$ (wie auch II_p) das Vorzeichen, wenn man zu einer anderen Orientierung übergeht. Zur Vermeidung dieser Orientierungsabhängigkeit betrachtet man in der Regel den **mittleren Krümmungsvektor**

$$\mathbf{H}(p) := H(p)\mathcal{N}(p),$$

der sich bei Ersetzung von \mathcal{N} durch $-\mathcal{N}$ nicht ändert. Außerdem läßt sich \mathbf{H} auch für beliebige (nicht notwendig orientierbare) Flächen definieren. Dazu wählt man einfach lokal in der Nähe eines Punktes p ein Normalenfeld (dies existiert immer, da eine C^2 -Mannigfaltigkeit ja lokal parametrisiert werden kann).

Wir berechnen nun die erste Variation des Flächeninhalts $\operatorname{Area}(S)$ und stellen den Zusammenhang zur mittleren Krümmung her: Zunächst erinnern wir an die Formel

$$\operatorname{Area}(S) = \int_{\Omega} |\partial_u F \times \partial_v F| \, du \, dv = \int_{\Omega} \sqrt{\det g} \, du \, dv,$$

wobei

$$g_{11} := \partial_u F \cdot \partial_u F, \quad g_{12} := \partial_u F \cdot \partial_v F =: g_{21}, \quad g_{22} := \partial_v F \cdot \partial_v F$$

die Koeffizienten der Darstellungsmatrix $g := (g_{ij})$ der sog. ersten Fundamentalform von S sind.

Seien $N(u, v) := \mathcal{N}(F(u, v))$, $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Man bildet mit

$$F^\varepsilon(u, v) := F(u, v) + \varepsilon \varphi(u, v) N(u, v) =: F(u, v) + \varepsilon \Psi(u, v)$$

die durch normale Variation entstehende Vergleichsfläche $S^\varepsilon = F^\varepsilon(\Omega)$ (vgl. Fig. 2.4), deren Inhalt durch

$$\text{Area}(S^\varepsilon) = \int_{\Omega} \sqrt{\det g^\varepsilon} \, du \, dv,$$

$$g_{11}^\varepsilon := \partial_u F^\varepsilon \cdot \partial_u F^\varepsilon, \quad g_{12}^\varepsilon := \partial_u F^\varepsilon \cdot \partial_v F^\varepsilon =: g_{21}^\varepsilon, \quad g_{22}^\varepsilon := \partial_v F^\varepsilon \cdot \partial_v F^\varepsilon$$

gegeben ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon|_0} \text{Area}(S^\varepsilon) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \sqrt{\det g^\varepsilon} \, du \, dv \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon \, du \, dv \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}^\varepsilon) &= |\partial_u F|^2 |\partial_v F|^2 - (\partial_u F \cdot \partial_v F)^2 \\ &+ 2\varepsilon [|\partial_u F|^2 \partial_v F \cdot \partial_v \Psi + |\partial_v F|^2 \partial_u F \cdot \partial_u \Psi] \\ &- 2\varepsilon \partial_u F \cdot \partial_v F [(\partial_u F \cdot \partial_v \Psi) + (\partial_v F \cdot \partial_u \Psi)] + \text{Terme mit Vorfaktor } \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det(g_{ij}^\varepsilon) &= 2(|\partial_u F|^2 \partial_v F \cdot \partial_v \Psi + |\partial_v F|^2 \partial_u F \cdot \partial_u \Psi) \\ &- 2 \partial_u F \cdot \partial_v F (\partial_u F \cdot \partial_v \Psi + \partial_v F \cdot \partial_u \Psi). \end{aligned}$$

Nun benutzt man die für $i, j \in \{1, 2\}$ gültige Beziehung

$$\begin{aligned} \partial_i \Psi \cdot \partial_j F &= \partial_i(\varphi N) \cdot \partial_j F = \partial_i \varphi N \cdot \partial_j F + \varphi \partial_i N \cdot \partial_j F \\ &= \varphi \partial_i N \cdot \partial_j F = -\varphi II(\partial_i F, \partial_j F), \end{aligned}$$

die wir uns vorhin im Zusammenhang mit der Symmetrie der zweiten Fundamentalform überlegt haben (dabei: $\partial_1 := \partial_u$, $\partial_2 := \partial_v$). Dabei geht natürlich die Orthogonalitätsrelation

$$N \cdot \partial_j F = 0$$

ein. Man bekommt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon &= -2\varphi \left[|\partial_u F|^2 II(\partial_v F, \partial_v F) + |\partial_v F|^2 II(\partial_u F, \partial_u F) \right. \\ &\quad \left. - 2 \partial_u F \cdot \partial_v F II(\partial_u F, \partial_v F) \right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die rechte Seite von (2.2) soll nun in Terme mit H umgeformt werden. Per Definition ist

$$H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{Spur} d\mathcal{N}_p = \frac{1}{2} (II_p(\xi, \xi) + II_p(\eta, \eta)),$$

wobei ξ, η eine beliebige Orthonormalbasis von $T_p S$ repräsentieren. Eine solche können wir aus den Basisvektoren $\partial_u F, \partial_v F$ wie folgt erzeugen:

$$\begin{aligned} \xi &:= \partial_u F / |\partial_u F|, \\ \tilde{\eta} &:= \partial_v F - (\partial_v F \cdot \xi) \xi, \\ \eta &:= \tilde{\eta} / |\tilde{\eta}|. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$|\tilde{\eta}|^2 = |\partial_v F|^2 - (\partial_v F \cdot \xi)^2 = |\partial_u F|^{-2} \det g,$$

und damit

$$\begin{aligned} 2H &= II(\xi, \xi) + |\tilde{\eta}|^{-2} II(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) \\ &= II(\xi, \xi) + |\tilde{\eta}|^{-2} II(\partial_v F - (\partial_v F \cdot \xi) \xi, \partial_v F - (\partial_v F \cdot \xi) \xi) \\ &= II(\xi, \xi) \left(1 + |\tilde{\eta}|^{-2} (\partial_v F \cdot \xi)^2\right) + |\tilde{\eta}|^{-2} II(\partial_v F, \partial_v F) - 2 |\tilde{\eta}|^{-2} \partial_v F \cdot \xi II(\partial_v F, \xi) \\ &= |\tilde{\eta}|^{-2} |\partial_v F|^2 II(\xi, \xi) + |\tilde{\eta}|^{-2} II(\partial_v F, \partial_v F) - 2 |\tilde{\eta}|^{-2} \partial_v F \cdot \xi II(\partial_v F, \xi) \\ &= |\tilde{\eta}|^{-2} |\partial_u F|^{-2} \left(|\partial_v F|^2 II(\partial_u F, \partial_u F) + |\partial_u F|^2 II(\partial_v F, \partial_v F) \right. \\ &\quad \left. - 2 (\partial_u F \cdot \partial_v F) II(\partial_u F, \partial_v F) \right). \end{aligned}$$

Das liefert folgende Formel für die mittlere Krümmung:

$$H = \frac{1}{2 \det g} \left[|\partial_u F|^2 II(\partial_v F, \partial_v F) - 2 \partial_u F \cdot \partial_v F II(\partial_u F, \partial_v F) + |\partial_v F|^2 II(\partial_u F, \partial_u F) \right] \quad (2.3)$$

Kombiniert man schließlich (2.2) und (2.3), so lautet die erste Variation des Flächeninhalts

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} \operatorname{Area}(S^\varepsilon) = \int_\Omega \frac{1}{2 \sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon du dv = -2 \int_\Omega \varphi H \sqrt{\det g} du dv.$$

Ist S eine Minimalfläche in dem Sinne, dass

$$\operatorname{Area}(S) \leq \operatorname{Area}(S^\varepsilon)$$

für alle wie oben erzeugten Vergleichsflächen S^ε gilt, so folgt

$$\int_\Omega \varphi H \sqrt{\det g} du dv = 0$$

für beliebige Funktionen φ mit kompaktem Träger in Ω , und wir schließen wegen $\det g > 0$:

SATZ 2.4

Sei $S = F(\Omega)$ eine über dem Gebiet Ω regulär parametrisierte Fläche. Wenn S unter allen über Ω parametrisierten Flächen S^* mit gleichem Rand den Flächeninhalt minimiert, so folgt:

$$H \equiv 0.$$

BEMERKUNGEN

- (1) Wie schon mehrfach gesagt, ist die mittlere Krümmung H ein nur für global orientierbare Flächen S im \mathbb{R}^3 sinnvoller Begriff und abhängig davon, für welche Orientierung man sich entscheidet, d. h. man muss stets ein globales Normalenfeld auf S auszeichnen, auf das man sich bei der Berechnung von H bezieht. Für lokal flächenminimierende Objekte ist das natürlich unerheblich: H verschwindet unabhängig von der fixierten Orientierung.
- (2) Grundsätzlich kann man “Flächeninhalt” (als 2-dimensionales Hausdorff-Maß \mathcal{H}^2) auch für nicht orientierbare Flächen erklären. Für diese Objektklasse hat man ferner die vektorielle mittlere Krümmung \mathbf{H} , und die Aussage von Satz 2.4 lautet entsprechend:

Ist S eine lokal minimale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 , so gilt $\mathbf{H} = 0$ bzw. $H = 0$, wenn man H bzgl. beliebiger lokaler Parametrisierungen bildet.

□

Zur Vertiefung der geometrischen Begriffe wollen wir die mittlere Krümmung für Graphen $S = G_f$ ausrechnen und damit auch die Verbindung zur Minimalflächengleichung aus Satz 1.1 herstellen. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 und $S = G_f$ der zugehörige Graph. Als kanonische Parametrisierung bietet sich

$$F(u, v) := (u, v, f(u, v))$$

an, mit dem Normalenfeld

$$\mathcal{N}(F(u, v)) = N(u, v) = (-\nabla f(u, v), 0) / \sqrt{1 + |\nabla f(u, v)|^2}.$$

Dazu gehören die folgenden Größen:

$$\partial_u F = (1, 0, \partial_u f), \quad \partial_v F = (0, 1, \partial_v f), \quad \partial_u F \cdot \partial_v F = \partial_u f \partial_v f,$$

$$\det g = 1 + |\nabla f|^2,$$

$$II(\partial_u F, \partial_u F) = -\partial_u F \cdot \partial_u N = \partial_u^2 f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

$$II(\partial_v F, \partial_v F) = -\partial_v F \cdot \partial_v N = \partial_v^2 f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

$$II(\partial_u F, \partial_v F) = -\partial_v F \cdot \partial_u N = \partial_u \partial_v f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

Aus (2.3) folgt:

$$H = \frac{1}{2}(1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \left[\partial_u^2 f (1 + (\partial_v f)^2) - 2 \partial_u f \partial_v f \partial_u \partial_v f + \partial_v^2 f (1 + (\partial_u f)^2) \right].$$

Aus dieser Gleichung liest man ab:

⌊ f ist Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung genau dann,
wenn die mittlere Krümmung H von G_f identisch verschwindet.

Wir haben uns mit vorstehenden Überlegungen davon überzeugt, dass unser Ausgangsproblem “Finde Flächen kleinsten Inhalts” notwendig auf das Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung führt, d. h. Minimalflächen im eigentlichen Sinn erfüllen insbesondere $H \equiv 0$. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir einige allgemeine Eigenschaften von regulär parametrisierten Flächen mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$; als Folgerung unserer Überlegungen charakterisieren wir mit funktionentheoretischen Argumenten gewisse Klassen solcher Flächen.

§ 3

Konforme Parametrisierungen und die Weierstraß–Darstellung

Interessiert man sich für solche Eigenschaften einer Fläche, die nicht von der Parametrisierung abhängen, so kann man zur Diskussion dieser Eigenschaften möglichst “gute” lokale Koordinatensysteme einführen. Es stellt sich heraus, dass sogenannte konforme Parameter viele Vorzüge in sich vereinen (geometrische Größen der Fläche S nehmen in konformen Koordinaten eine besonders einfache Form an).

DEFINITION

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $F : \Omega \rightarrow S$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) ein lokales Koordinatensystem. Die Parametrisierung F heißt **konform**, falls

$$|\partial_u F| = |\partial_v F| \quad \text{und} \quad \partial_u F \cdot \partial_v F = 0$$

auf dem Definitionsgebiet Ω gilt.

Obige Bedingung sagt, dass die kanonischen Tangentenvektoren $\partial_u F, \partial_v F$ stets gleichlang sind und zudem aufeinander senkrecht stehen. Man überlegt sich leicht, dass konforme Parametrisierungen F **winkeltreu** sind: Schneiden sich zwei ebene Kurven γ_1, γ_2 in Ω unter dem Winkel α , so schneiden sich die zugehörigen Bildkurven $F \circ \gamma_1, F \circ \gamma_2$ ebenfalls unter diesem Winkel. Eine in voller Allgemeinheit nicht einfach zu beantwortende Frage ist natürlich die nach der Existenz von konformen Koordinatensystemen bei vorgelegter Fläche S . Dies werden wir später im Spezialfall klären, vorab begnügen wir uns mit einigen elementaren Aussagen.

Ist $F : \Omega \rightarrow S$ konform, so setzt man

$$\lambda^2 := |\partial_u F|^2 = |\partial_v F|^2$$

und sieht

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$$

für die erste Fundamentalform g von S , speziell ist

$$\det g = \lambda^4.$$

LEMMA 3.1

Ist F eine konforme Parametrisierung von S und bezeichnet \mathbf{H} die auf S erklärte vektorielle mittlere Krümmung, so gilt

$$\Delta F = 2\lambda^2 \mathbf{H}(F).$$

Insbesondere steht der komponentenweise gebildete Laplace–Operator ΔF auf S in den entsprechenden Bildpunkten von F senkrecht.

BEMERKUNG

Definiert man die mittlere Krümmung H bzgl. des natürlichen Normalenfeldes

$$\partial_u F \times \partial_v F / |\partial_u F \times \partial_v F|,$$

so ist

$$\mathbf{H}(F) = \lambda^{-2} H(F) \cdot \partial_u F \times \partial_v F,$$

wir bekommen die sogenannte

$$H\text{-Flächengleichung: } \Delta F = 2H \circ F \partial_u F \times \partial_v F,$$

die folgende Bedeutung hat: Zu gegebener Funktion $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (und vorgeschriebenen Randbedingungen) sucht man Lösungen F der Gleichung auf Ω , die zusätzlich noch die Konformitätsrelation erfüllen. Die Bilder $F(\Omega)$ sind dann Flächen, die in jedem Punkt $F(u, v)$ die mittlere Krümmung $H(F)$ haben. Die Wahl $H \equiv 0$ führt als Spezialfall auf die Theorie konform parametrisierter Minimalflächen. Das H -Flächensystem hat eine sehr komplizierte Struktur, Existenz- und Regularitätssätze sind erst in den letzten Jahren bewiesen worden, und es gibt immer noch viele offene Fragen.

BEWEIS VON LEMMA 3.1

Sei

$$N(u, v) = \partial_u F \times \partial_v F / |\partial_u F \times \partial_v F|$$

(also $\mathcal{N} \circ F = N$). Wir zeigen

$$\Delta F \cdot \partial_u F = 0 = \Delta F \cdot \partial_v F,$$

was sofort $\Delta F = \vartheta N$ mit einer geeigneten Funktion $\vartheta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ impliziert. Es ist

$$\begin{aligned} \partial_u^2 F \cdot \partial_u F &= \frac{1}{2} \partial_u |\partial_u F|^2 = \frac{1}{2} \partial_u |\partial_v F|^2 = \partial_v F \cdot \partial_u \partial_v F \\ &= \partial_v F \cdot \partial_v \partial_u F = \partial_v^2 F \cdot \partial_u F - \partial_v^2 F \cdot \partial_u F = -\partial_v^2 F \cdot \partial_u F, \end{aligned}$$

also $\Delta F \cdot \partial_u F = 0$, und die andere Relation folgt ganz analog. Es gilt andererseits:

$$\begin{aligned} H(F) &= \frac{1}{2 \det g} \left[|\partial_u F|^2 II(\partial_v F, \partial_v F) + |\partial_v F|^2 II(\partial_u F, \partial_u F) \right] \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} \left[II(\partial_u F, \partial_u F) + II(\partial_v F, \partial_v F) \right] = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[\partial_u F \cdot \partial_u N + \partial_v F \cdot \partial_v N \right]. \end{aligned}$$

Beachtet man

$$\partial_u F \cdot \partial_u N = -N \cdot \partial_u^2 F \quad \text{und} \quad \partial_v F \cdot \partial_v N = -N \cdot \partial_v^2 F,$$

so folgt:

$$H(F) = \frac{1}{2\lambda^2} \Delta F \cdot N = \frac{1}{2\lambda^2} \vartheta,$$

und damit $\Delta F = 2\lambda^2 H(F) \cdot N = 2\lambda^2 \mathbf{H}(F)$. □

Als Korollar bekommt man

LEMMA 3.2

Sei F konforme Parametrisierung der Klasse C^2 einer Fläche S . Dann gilt:

$$S \text{ ist Minimalfläche } (H = 0) \iff F \text{ ist harmonisch } (\Delta F = 0).$$

Wir wollen nun kurz andeuten, wie man konform parametrisierte Minimalflächen mit funktionentheoretischen Methoden beschreiben kann. Sei dazu

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \text{ offen,}$$

eine beliebige Abbildung der Klasse C^2 . Wir schreiben $z = u + iv$ für einen Punkt $(u, v) \in \Omega$ und setzen für $k = 1, 2, 3$

$$\phi_k(z) := \partial_u F^k(z) - i \partial_v F^k(z). \quad (3.1)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(z) &= \sum_{k=1}^3 (\partial_u F^k(z))^2 - \sum_{k=1}^3 (\partial_v F^k(z))^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \partial_u F^k(z) \partial_v F^k(z) \\ &= |\partial_u F|^2(z) - |\partial_v F|^2 - 2i \partial_u F(z) \cdot \partial_v F(z), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sowie

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2(z) = |\partial_u F(z)|^2 + |\partial_v F(z)|^2, \quad (3.3)$$

und man erkennt sofort folgende Aussagen:

- (a) ϕ_k holomorph auf Ω für jedes $k = 1, 2, 3$ genau dann, wenn F auf Ω harmonisch ist.

BEWEIS

Es ist

$$\Delta F^k = \partial_u^2 F^k + \partial_v^2 F^k = \partial_u \operatorname{Re} \phi_k - \partial_v \operatorname{Im} \phi_k,$$

so dass also gilt:

$$\Delta F^k = 0 \iff \partial_u \operatorname{Re} \phi_k = \partial_v \operatorname{Im} \phi_k$$

Diese Gleichung folgt aber sofort aus der Definition von ϕ_k , denn die zweiten Ableitungen von F^k sind ja symmetrisch. Mithin verschwindet der Laplace-Operator von F^k genau dann, wenn ϕ_k die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt, also eine auf Ω holomorphe Funktion darstellt.

- (b) F ist genau dann konform, wenn $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0$ auf Ω ist.

BEWEIS

Dies ergibt sich unmittelbar aus (3.2).

- (c) Ist F konform, so gilt:

$$\operatorname{rg} DF = 2 \text{ auf } \Omega \iff \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 > 0 \text{ auf } \Omega.$$

BEWEIS

Offenbar ist $\operatorname{rg} DF(z) = 2$ wegen der Konformitätsrelation gleichbeutend mit

$$\begin{aligned} |\partial_u F(z) \times \partial_v F(z)| > 0 &\iff |\partial_u F(z)|^2 |\partial_v F(z)|^2 - (\partial_u F \cdot \partial_v F)^2 > 0 \\ &\iff |\partial_u F(z)|^4 > 0 \iff |\partial_u F(z)|^2 + |\partial_v F(z)|^2 > 0 \\ &\iff \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 > 0. \end{aligned}$$

□

Als Konsequenz von (a)–(c) erhält man:

LEMMA 3.3

Sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ konforme Parametrisierung eines Teils einer Minimalfläche S (im Sinne $H = 0$). Dann gilt:

$$\phi_k(z) := \partial_u F^k(z) - i \partial_v F^k(z), \quad (k = 1, 2, 3, z = u + iv \in \Omega),$$

sind holomorph auf Ω mit

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k(z)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 > 0 \quad (3.4)$$

in jedem Punkt $z \in \Omega$.

□

Nun sind wir aber eigentlich an Verfahren zur Erzeugung von Minimalflächen interessiert, und Lemma 3.3 geht gerade wieder den anderen Weg. Um Minimalflächen zu

konstruieren, gehen wir aus von drei holomorphen Funktionen

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ aus und verlangen die Gültigkeit von (3.4) in jedem Punkt $z \in \Omega$. Ist Ω einfach zusammenhängend (anschaulich “ohne Löcher”), so gibt es zu ϕ_k eine bis auf additive Konstanten eindeutige komplexe Stammfunktion, zum Beispiel ist dann die Wahl

$$\Psi_k(z) := \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \quad (z \in \Omega)$$

möglich, worin $\int_{z_0}^z$ die Integration längs eines beliebigen Weges in Ω von z_0 nach z bedeutet und $z_0 \in \Omega$ für einen beliebigen, aber fest gewählten, Basispunkt steht.

Setzt man nun

$$F^k(z) := \operatorname{Re} \Psi_k(z) \quad (z \in \Omega), \quad (3.5)$$

so ist $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reell analytische Abbildung, für die offenbar gilt:

$$\partial_u F^k - i \partial_v F^k = \partial_u \operatorname{Re} \Psi_k - i \partial_v \operatorname{Re} \Psi_k = \partial_u \operatorname{Re} \Psi_k + i \partial_v \operatorname{Im} \Psi_k = \Psi_k'(z) = \phi_k(z)$$

für alle $z \in \Omega$, denn für jede holomorphe Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist deren komplexe Ableitung gegeben durch

$$f'(z) = \partial_u \operatorname{Re} f(z) + i \partial_v \operatorname{Im} f(z) \quad (z = u + iv \in \Omega).$$

Mithin sind die gemäß (3.1) zu F assoziierten Funktionen gerade unsere vorgegebenen holomorphen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , und aus den Bedingungen (3.4) lesen wir mit unseren Vorüberlegungen ab: Die in (3.5) definierte Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist harmonisch, erfüllt die Konformitätsrelation und hat überall maximalen Rang. Allerdings handelt es sich bei F im allgemeinen nicht um eine Parametrisierung der Bildmenge $F(\Omega)$, denn über globale Injektivität von F wird ja nichts ausgesagt. Mit anderen Worten: $F(\Omega)$ kann durchaus Selbstdurchschneidungen haben und ist dann gar keine Mannigfaltigkeit! (F ist lediglich eine konforme Immersion.) Immerhin lässt sich folgendes sagen: Ist $(u_0, v_0) \in \Omega$ beliebig, so folgt aus $\operatorname{rg} DF(u_0, v_0) = 2$ die Existenz einer kleinen Umgebung Ω' von (u_0, v_0) in Ω , so dass $F|_{\Omega'}$ das Gebiet $F(\Omega')$ regulär parametrisiert; folglich ist $F(\Omega')$ eine Mannigfaltigkeit mit verschwindender mittlerer Krümmung, und das ganze Bild $F(\Omega)$ ist aus solchen Stücken von Minimalflächen zusammengesetzt. Wir halten fest:

LEMMA 3.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und seien $\phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf Ω holomorph mit (3.4). Man setzt für $z_0 \in \Omega$ (bis auf Konstanten)

$$F_k(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \quad (k = 1, 2, 3, z \in \Omega).$$

Dann ist für genügend kleine Teilgebiete Ω' von Ω das Bild $F(\Omega')$ eine Minimalfläche, die durch $F|_{\Omega'}$ regulär und konform parametrisiert wird. Für injektive F ist sogar das ganze Bild $F(\Omega)$ eine Minimalfläche.

□

BEMERKUNG

Verzichtet man auf die Forderung $\sum_k |\phi_k|^2 > 0$ in jedem Punkt, so bedeutet dies, dass es ein $z \in \Omega$ gibt mit $\operatorname{rg} DF(z) < 2$, was wegen der Konformität äquivalent ist zu $\partial_u F(z) = \partial_v F(z) = 0$. Solche Punkte nennt man **Verzweigungspunkte** von F . Verzweigungspunkte sind offenbar genau die gemeinsamen Nullstellen von ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_3 , die nach bekannten Sätzen über holomorphe Funktionen in Ω isoliert liegen, sich also nicht im Inneren von Ω sondern nur zum Rand $\partial\Omega$ hin häufen können, vorausgesetzt nicht alle drei Funktionen sind identisch 0.

ZUSATZ ZU LEMMA 3.4

Seien $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, nicht identisch 0, mit

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0.$$

Dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\Lambda \subset \Omega$ ohne Häufungspunkte in Ω , so dass $F(\Omega')$ für genügend kleine Gebiete $\Omega' \subset \Omega \setminus \Lambda$ eine regulär parametrisierte Minimalfläche ist. □

Diese Erkenntnis bringt uns natürlich der Lösung des Plateau-Problems (Konstruktion von Minimalflächen zu gegebener Berandung Γ) in keiner Weise näher; immerhin sind wir jetzt in der Lage, durch Angabe holomorpher Funktionen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 mit $\sum_k \phi_k^2 \equiv 0$ eine Vielzahl von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung zu definieren. Das führt letztendlich auf:

Die Weierstraß-Darstellung für Minimalflächen:

Nach den vorstehenden Überlegungen reduziert sich die Fragestellung darauf, bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen $\phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3$, zu finden mit

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \quad \text{auf } \Omega. \quad (3.6)$$

Man erhält folgende Aussage:

SATZ 3.1

Sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph (also holomorph bis auf Polstellen als mögliche Singularitäten), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph mit folgender Eigenschaft. Hat g in z einen Pol der Ordnung m , soll f in z eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2m$ haben. Dann sind die Funktionen

$$\phi_1 := \frac{1}{2} f(1 - g^2), \quad \phi_2 := \frac{i}{2} f(1 + g^2) \quad \text{und} \quad \phi_3 := fg \quad (3.7)$$

holomorph in Ω und Lösungen von (3.6). Sind umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 Lösungen von (3.6), für welche **nicht**

$$\phi_1 = i\phi_2, \quad \phi_3 = 0$$

ist, so findet man f, g wie oben beschrieben und mit der Eigenschaft, dass ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 durch die Formeln (3.7) gegeben sind.

BEMERKUNG

Sind f, g wie in Satz 3.1, so nennt man $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F_1(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\zeta)(1 - g^2(\zeta)) d\zeta,$$

$$F_2(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2} f(\zeta)(1 + g^2(\zeta)) d\zeta,$$

$$F_3(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta)g(\zeta) d\zeta,$$

mit $z_0 \in \Omega$, die **Weierstraß–Darstellung** der “Minimalfläche $F(\Omega)$ ”. Hierbei ist die Bezeichnung Minimalfläche so zu verstehen, dass Verzweigungspunkte und Selbstdurchschneidungen zulässig sind, die Einschränkung von F auf kleine Gebiete $\Omega' \subset \Omega$ ohne Verzweigungspunkte aber regulär konforme Parametrisierungen von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung sind.

Anmerkung: Eine holomorphe Funktion $g : \Omega \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf Ω meromorph, wenn Λ eine abzählbare Teilmenge von Ω ist, die sich höchstens zum Rand $\partial\Omega$ von Ω hin häuft, und wenn g in jedem Punkt $z \in \Lambda$ eine Polstelle hat (vgl. [Cartan], S. 45 oder [Behnke, Sommer], S. 201).

Meromorphe Funktionen $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ haben die Form $g = \varphi/\psi$ mit holomorphen Funktionen $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, wobei φ auf Ω nullstellenfrei ist und ψ auf einer abzählbaren Menge $\Lambda \subset \Omega$ verschwindet.

BEWEIS VON SATZ 3.1

Seien f, g wie im Satz beschrieben und $\phi_k, k = 1, 2, 3$, gemäß (3.7) erklärt. Ist z_0 Pol der Ordnung m von g , so folgt die Beschränktheit von $(fg^2)(z)$ bei $z \rightarrow z_0$, so dass die Singularität z_0 von fg^2 hebbar ist. Erstrecht hat dann fg bei z_0 keine Singularität, weshalb ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auf Ω holomorph sind. Die Gültigkeit von (3.6)

rechnet man nach.

Seien nun umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auf Ω holomorphe Lösungen von (3.6) und nicht vom Typ

$$\phi_1 = i\phi_2, \quad \phi_3 = 0.$$

Man setzt dann (multipliziere die zweite Gleichung aus (3.7) mit $-i$ und addiere das Ergebnis zur ersten Gleichung)

$$f := \phi_1 - i\phi_2, \quad g := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Dann ist f holomorph und g meromorph auf Ω und aus (3.6) folgt

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2,$$

also

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2.$$

Die linke Seite ist auf Ω holomorph, also muss auch fg^2 holomorph sein, und dies ist nur möglich, wenn f in den Polen von g der Ordnung m eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2m$ hat. Dass schließlich mit den oben definierten Funktionen f, g die Beziehungen (3.7) bestehen, rechnet man einfach nach. \square

ZUSATZ

Sind f, g wie in Satz 3.1 und gilt zusätzlich, dass f in jedem Pol von g der Ordnung m eine Nullstelle der Ordnung genau $2m$ hat, und die Nullstellen von f genau die Polstellen von g sind, so ist F ohne Verzweigungspunkte.

BEWEIS

Ein Punkt $z \in \Omega$ ist genau dann ein Verzweigungspunkt von F , wenn

$$|\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 + |\phi_3(z)|^2 = 0$$

gilt, wobei $\phi_k, k = 1, 2, 3$, mit f und g gemäß (3.7) erklärt sind. Speziell ist (vgl. die vorige Rechnung)

$$0 = \phi_1(z) + i\phi_2(z) = -f(z) \cdot g^2(z) \quad \text{und} \quad 0 = \phi_1(z) - i\phi_2(z) = f(z).$$

Mithin ist z Nullstelle von f der Ordnung $2m$ und daher Pol von g der Ordnung m . Vermöge dieser Ordnungsbeziehungen kann aber $f(z)g^2(z)$ nicht verschwinden. \square

BEISPIEL

Wir betrachten die Funktionen

$$f(z) = z^2, \quad g(z) = 1/z.$$

Offenbar ist f auf \mathbb{C} holomorph und g ist meromorph mit der einfachen Polstelle $z = 0$. Gemäß (3.7) ist

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1), \quad \phi_2(z) = \frac{i}{2}(z^2 + 1), \quad \phi_3(z) = z,$$

und man erhält die Weierstraß-Darstellung:

$$F_1(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2} (\zeta^2 - 1) d\zeta = \operatorname{Re} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} \right),$$

$$F_2(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{2} (\zeta^2 + 1) d\zeta = \operatorname{Re} i \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z}{2} \right),$$

$$F_3(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \zeta d\zeta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} z^2,$$

also (vermöge der Identifikation $z = u + iv \leftrightarrow (u, v)$)

$$F_1(u, v) = \frac{1}{6} (u^3 - 3uv^2) - \frac{1}{2}u,$$

$$F_2(u, v) = \frac{1}{6} (v^3 - 3u^2v) - \frac{1}{2}v,$$

$$F_3(u, v) = \frac{1}{2} (u^2 - v^2).$$

Das ist bis auf Ähnlichkeiten (Streckung mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ und Spiegelung an der xy -Ebene) genau die sog. **Enneper-Minimalfläche**, die in *Fig. 3.1* dargestellt ist. (Vgl. dazu auch [Do Carmo], S. 205 und [Leichtweiß].) Die Enneper-Fläche ist ohne Verzweigungspunkte (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 haben keine gemeinsamen Nullstellen), allerdings treten Selbstdurchschneidungen auf (vgl. [Do Carmo], S. 206).

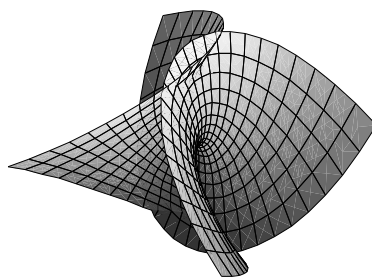


Fig. 3.1

□

Die vorstehenden Überlegungen haben mehrfach ausgenutzt, dass man lokal konforme Parameter einführen kann. Ob dies aber tatsächlich geht, ist nicht ganz offensichtlich. **Tatsächlich kann man auf jeder Fläche lokal konforme Koordinatensysteme einführen** (eine Ausarbeitung findet man z. B. bei [Bers], S. 15–35). Wir begnügen uns damit, den Existenzbeweis für Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung zu führen, die Argumente sind dann wesentlich einfacher.

SATZ 3.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ regulär (d. h. injektiv, glatt und DF mit maximalem Rang). Außerdem verschwinde die mittlere Krümmung von $S = F(\Omega)$ (d. h. $H(F) = 0$). Dann hat jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $V = V(p)$, so dass $S \cap V$ über einem Gebiet der Ebene konform parametrisiert werden kann.

BEWEIS

Sei $p \in S$ beliebig. Da für die vorgegebene Parametrisierung überall $\text{rg } DF = 2$ ist, kann man S so im Raum \mathbb{R}^3 drehen, dass S lokal bei p Graph einer Funktion $f(u, v)$ ist, d. h. man findet eine (offene) Kreisscheibe $D_r(a) \subset \Omega$ und eine glatte Funktion $f : D_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$S \cap V = G_f$$

für eine geeignete Umgebung $V = V(p) \subset \mathbb{R}^3$ von p . Hierbei ist zu beachten, dass die mittlere Krümmung eine gegen Rotation invariante Größe ist und dass man konforme Parametrisierungen mit Rotationen verketteten kann, ohne die Konformität zu zerstören. Man setzt

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_u f)^2), \\ \varphi_2 &:= (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_u f \partial_v f\end{aligned}$$

auf $D_r(a)$ und erhält

$$\begin{aligned}\partial_v \varphi_1 - \partial_u \varphi_2 &= -(1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \left[\partial_u f \partial_v f \left((1 + \partial_u f^2) - \partial_v f^2 - (1 + |\nabla f|^2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_v f \partial_v^2 f (1 + \partial_u f^2) + \partial_v f \partial_u^2 f \left((1 + |\nabla f|^2) - \partial_u f^2 \right) \right] \\ &= -(1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \left[\partial_u^2 f (1 + \partial_v f^2) - 2 \partial_u f \partial_v f \partial_u \partial_v f + \partial_v^2 f (1 + \partial_u f^2) \right] = 0,\end{aligned}$$

denn [...] ist ja gerade die nichtparametrische Minimalflächengleichung für f . Daraus folgt: Es gibt eine (bis auf Konstanten eindeutig bestimmte) sog. Potentialfunktion $\Phi : D_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$, d. h. mit $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$ ist

$$\nabla \Phi = \varphi \quad \text{in } D_r(a), \quad (3.8)$$

die man sofort explizit angeben kann. Im Fall $a = (0, 0)$ (sonst nehme man eine Translation vor) ist zum Beispiel

$$\Phi(u, v) := \int_0^1 \varphi(tu, tv) \cdot (u, v) dt$$

eine mögliche Wahl, denn:

$$\begin{aligned}\partial_u \Phi(u, v) &= \int_0^1 \varphi(tu, tv) \cdot (1, 0) + t \nabla \varphi(tu, tv) \cdot (u, v) dt \\ &= \int_0^1 \varphi_1(tu, tv) + t (u \partial_u \varphi_1(tu, tv) + v \partial_v \varphi_1(tu, tv)) dt \\ &= \int_0^1 \varphi_1(tu, tv) + t \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(tu, tv) dt = \varphi_1(u, v),\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt partiell integriert wurde; entsprechend rechnet man $\partial_v \Phi = \varphi_2$ nach.

Analog zu φ_1, φ_2 definieren wir weiter die Funktionen

$$\psi_1 := \varphi_2, \quad \psi_2 := (1 + |\nabla f|^2)^{1/2} (1 + (\partial_v f)^2)$$

auf $D_r(a)$, und schließen wie oben auf die Existenz einer Funktion $\Psi : D_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\nabla \Psi = \psi \quad \text{in } D_r(a), \tag{3.9}$$

wobei $\psi := (\psi_1, \psi_2)$ ist. Sei jetzt

$$\Lambda(u, v) = (u + \Phi(u, v), u + \Psi(u, v)), \quad ((u, v) \in D_r(a)).$$

Wir berechnen die Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned} \det D\Lambda &= \partial_u \Lambda_1 \partial_v \Lambda_2 - \partial_u \Lambda_2 \partial_v \Lambda_1 \\ &= 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (2 + (\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2) \\ &\quad + (1 + |\nabla f|^2)^{-1} (1 + (\partial_u f)^2) (1 + (\partial_v f)^2) \\ &\quad - (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \partial_u f^2 \partial_v f^2 > 1, \end{aligned}$$

so dass Λ insbesondere eine kleine Kreisscheibe $D_\rho(a) \subset D_r(a)$ diffeomorph auf eine Umgebung $U = U(b)$ des Punktes $b := \Lambda(a)$ abbildet. (Tatsächlich ist Λ sogar besser, vgl. Lemma 5.4.) Schließlich betrachten wir die Abbildung

$$\chi : U \ni (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (\Lambda|_{D_\rho(a)}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v}), f \circ \Lambda|_{D_\rho(a)}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v})) \in G_f|_{D_\rho(a)}$$

Nach Konstruktion ist klar, dass χ den Bereich U auf eine Umgebung von p in S abbildet, nämlich auf genau den Teil von S im Kreiszyylinder $D_\rho(a) \times \mathbb{R}$ über der verkleinerten Kreisscheibe $D_\rho(a)$ (Fig. 3.2). Weiterhin ist offensichtlich, dass χ überall den maximal möglichen Rang 2 hat, denn dies gilt für die Graphenabbildung und diese wird von rechts mit dem Diffeomorphismus $\Lambda|_{D_\rho(a)}^{-1}$ verknüpft.

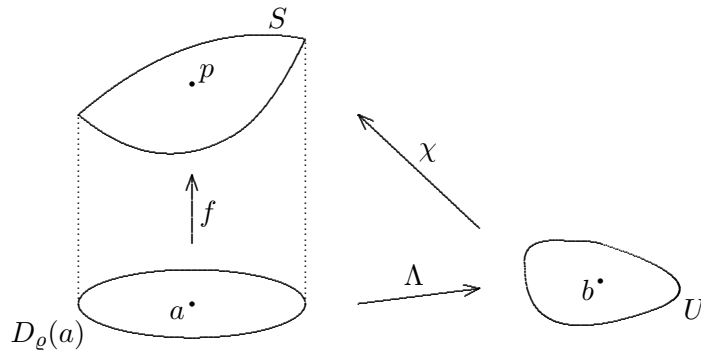


Fig. 3.2

Nachzurechnen bleiben die Konformitätsrelationen: Mit $(u, v) = \Lambda|_{D_e(a)}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v})$ wird

$$\begin{aligned} D(\Lambda|_{D_e(a)}^{-1})(\tilde{u}, \tilde{v}) &= (D\Lambda(u, v))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_1(u, v) & \varphi_2(u, v) \\ \varphi_2(u, v) & 1 + \psi_2(u, v) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det D\Lambda(u, v)} \begin{pmatrix} 1 + \psi_2(u, v) & -\varphi_2(u, v) \\ -\varphi_2(u, v) & 1 + \varphi_1(u, v) \end{pmatrix} =: \frac{1}{\det D\Lambda(u, v)} \Pi(u, v), \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} D(f \circ \Lambda|_{D_e(a)}^{-1})(\tilde{u}, \tilde{v}) &= Df(u, v) \circ D(\Lambda|_{D_e(a)}^{-1})(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= \frac{1}{\det D\Lambda(u, v)} \Pi(u, v) \nabla f(u, v) = \frac{1 + (1 + |\nabla f(u, v)|^2)^{-1/2}}{\det D\Lambda(u, v)} \nabla f(u, v) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} D\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \frac{1}{\det D\Lambda(u, v)} \begin{pmatrix} \Pi(u, v) \\ \pi(u, v) \end{pmatrix}, \\ \pi(u, v) &:= 1 + (1 + |\nabla f(u, v)|^2)^{-1/2} \nabla f(u, v). \end{aligned}$$

Damit bleibt zu zeigen, dass die Spalten $X = X(u, v)$, $Y = Y(u, v)$ der Matrix (Π, π) die Konformitätsbedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= -2 \partial_u f \partial_v f (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} - \left(1 + \frac{1}{1 + |\nabla f|^2}\right) \partial_u f \partial_v f \\ &+ \left(1 + \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} + 2(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}\right) \partial_u f \partial_v f \equiv 0 \end{aligned}$$

und man rechnet analog nach:

$$|X|^2 - |Y|^2 \equiv 0$$

Damit ist gezeigt:

$$\partial_u \chi \cdot \partial_v \chi = 0, \quad \text{und} \quad |\partial_u \chi| = |\partial_v \chi|,$$

so dass χ eine konforme Parametrisierung von S bei p ist. \square

Als Anwendung bekommt man:

SATZ 3.3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Dann ist f reell analytisch.

BEWEIS

Sei $(u_0, v_0) \in \Omega$ beliebig. Nach den Überlegungen aus dem vorigen Satz gibt es eine (kleine) Kreisscheibe $D_\varrho(u_0, v_0)$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und einen C^2 -Diffeomorphismus $\Lambda : D_\varrho(u_0, v_0) \rightarrow U$, so dass

$$\chi := (\Lambda^{-1}, f \circ \Lambda^{-1}) : U \rightarrow \mathbb{R}$$

die Fläche G_f lokal bei $(u_0, v_0, f(u_0, v_0))$ konform parametrisiert.

Beachte: Λ ist so regulär wie die beiden Funktionen Φ, Ψ . Aus den Formeln (3.8) bzw. (3.9) folgt, dass die Ableitungen von Φ, Ψ nur erste Ableitungen von f enthalten. Für C^2 -Funktionen f sind also auch Φ, Ψ von der Klasse C^2 .

Nach Lemma 3.2 gilt nun

$$\Delta\chi = \Delta(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = 0,$$

die anschließend Proposition ergibt daher, dass χ_1, χ_2 und χ_3 reell analytisch sind. Insbesondere ist Λ^{-1} reell analytisch (genauer jede Komponente von Λ^{-1}), und damit auch Λ selbst. Die Analytizität von $\chi_3 = f \circ \Lambda^{-1}$ ergibt also:

$$f = (f \circ \Lambda^{-1}) \circ \Lambda \in C^\omega,$$

was zu zeigen war. □

PROPOSITION

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 eine harmonische Funktion.
Dann ist h reell analytisch.

BEWEIS

Sei $D_r(z_0) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Man sucht eine Funktion $H : D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$f := h + iH : D_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

holomorph ist. Die Analytizität von f liefert dann sofort die von h .

Sei o. E. $z_0 := 0$. Man setzt an (unterstellt H existiert und mit $z := u + iv = (u, v)$)

$$\begin{aligned} H(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} H(tz) dt + H(0) \\ &= \int_0^1 u \partial_u H(tz) + v \partial_v H(tz) dt + H(0) \\ &= \int_0^1 -u \partial_v h(tz) + v \partial_u h(tz) dt + H(0) \end{aligned}$$

nach den Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen. Da die Konstante $H(0)$ unwesentlich ist, wird man auf folgende Definition geführt:

$$H(z) := \int_0^1 v \partial_u h(tz) - u \partial_v h(tz) dt.$$

Zu überprüfen ist, ob für $f := h + iH$ nun wirklich die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen gelten:

$$\begin{aligned}\partial_u H(z) &= \int_0^1 -u \partial_v h(tz) - tu \partial_u \partial_v h(tz) + tv \partial_u^2 h(tz) dt \\ &= \int_0^1 -\partial_v h(tz) - tu \partial_u \partial_v h(tz) - tv \partial_v^2 h(tz) dt,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Harmonizität von h ausgenutzt wurde. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial_v h(tz)) = u \partial_u \partial_v h(tz) + v \partial_v^2 h(tz)$$

wird also

$$\partial_u H(z) = \int_0^1 -u \partial_v h(tz) - t \frac{\partial}{\partial t}(\partial_v h(tz)) dt = -\partial_v h(z),$$

und mit demselben Argument folgt $\partial_v H = \partial_u h$. □

BEMERKUNG

Die Funktion H heißt die zu h konjugiert harmonische Funktion, diese existiert lokal immer und ist bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten findet man global konjugiert harmonische Funktionen. Umgekehrt gilt wegen der Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen: Ist $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind $\operatorname{Re} \varphi$ und $\operatorname{Im} \varphi$ harmonisch auf Ω .

§ 4

Der Satz von Bernstein

In diesem Abschnitt geht es um den sog. Satz von Bernstein (1916 formuliert und 1927 erschienen, s. [Bernstein]) und damit zusammenhängende Folgerungen. Der Satz lautet (vgl. [Nitsche], S. 130)

SATZ 4.1 (Bernstein)

┌ Eine ganze C^2 -Lösung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ist affin-linear, d. h. der f zugeordnete Graph G_f ist eine Ebene in \mathbb{R}^3 .

BEMERKUNG

- (1) Der Terminus “ganze Lösung” bezieht sich darauf, dass f auf der ganzen Ebene erklärt ist und dort die nichtparametrische Minimalflächengleichung löst.
- (2) Der Satz von Bernstein erinnert in seiner Konzeption etwas an den bekannten Satz von Liouville über ganze holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, welcher besagt:

$$f \text{ beschränkt} \implies f \equiv \text{const.}$$

Als Folgerung des Satzes von Liouville bekommt man den

Satz von Liouville für harmonische Funktionen:

Ist $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von $\Delta h = 0$ und zudem beschränkt, so muss h konstant sein.

Gleichzeitig gibt es durchaus nichtkonstante und nicht affin-lineare, ganze Lösungen von

$$\Delta h \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

d. h. aus dem Erfülltsein der linearen Laplace-Gleichung alleine lässt sich über die Struktur der Lösung noch keine Information gewinnen. Der Satz von Bernstein zeigt, dass Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen ein vom linearen Fall völlig abweichendes Verhalten zeigen können.

- (3) Statt Minimalflächen $S \subset \mathbb{R}^3$ zu betrachten kann man allgemeiner n -dimensionale minimale Hyperflächen im Raum \mathbb{R}^{n+1} studieren. Zum Beispiel ist der Graph einer Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, genau dann lokal minimal in \mathbb{R}^{n+1} , wenn

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (4.1)$$

gilt, und viele Autoren haben sich mit der naheliegenden Frage befasst, ob der Satz von Bernstein auf ganze Lösungen von (4.1) ausgedehnt werden kann. Dies gelang schrittweise für $n \leq 7$ (z. B. Almgren, De Giorgi, Simons), in Dimensionen $n > 7$ gibt es jedoch Gegenbeispiele (vgl. [Nitsche], S. 130, für Literatur).

Mit Vorkenntnissen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kann man Satz 4.1 auf elegantem Weg beweisen, wir bevorzugen eine schrittweise elementare Darstellung, die auf einer genauen Analyse der Abbildungseigenschaften des im Beweis von Satz 3.2 eingeführten Diffeomorphismus Λ beruht: Das Bild der Kreisscheibe $D_r(a)$ unter Λ enthält insbesondere eine Kreisscheibe um $\Lambda(a)$ mit Radius r .

Das ist die Aussage von Lemma 4.4, die ihrerseits aus einigen einfachen Sachverhalten für konvexe Funktionen folgt.

LEMMA 4.1

Sei $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 auf einer konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Die Hesse-Matrix D^2E sei in jedem Punkt positiv definit, d. h.

$$D^2E(x)(z, z) > 0 \quad \text{für alle } x \in D, z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Dann gilt:

$$(\nabla E(x) - \nabla E(y)) \cdot (x - y) > 0 \quad (4.2)$$

für alle $x \neq y$ aus D .

BEWEIS

Mit $e(t) := E(tx + (1 - t)y)$ für $t \in [0, 1]$ ist

$$e'(1) - e'(0) = (\nabla E(x) - \nabla E(y)) \cdot (x - y)$$

und

$$e''(t) = D^2E(tx + (1 - t)y)(x - y, x - y) > 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 1],$$

also $e'(1) > e'(0)$. □

LEMMA 4.2

Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.1 sei

$$L := id_D + \nabla E : D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + \partial_x E(x, y), y + \partial_y E(x, y)).$$

Dann ist für alle $x \neq y$ aus D

$$(L(x) - L(y)) \cdot (x - y) > |x - y|^2, \quad (4.3)$$

$$|L(x) - L(y)| > |x - y|. \quad (4.4)$$

BEWEIS

(4.3) sieht man direkt aus (4.2):

$$(L(x) - L(y)) \cdot (x - y) = (\nabla E(x) - \nabla E(y)) \cdot (x - y) + |x - y|^2 > |x - y|^2,$$

und (4.4) folgt, wenn man die linke Seite von (4.3) nach oben mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz abschätzt. \square

LEMMA 4.3

Mit den Notationen aus den Lemmata 5.1 und 5.2 und $D := D_r(0)$ für ein $r > 0$ gilt: Die Abbildung L ist ein Diffeomorphismus von $D_r(0)$ auf ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und es ist

$$D_r(L(0)) \subset G, \quad (4.5)$$

d. h. G enthält eine Kreisscheibe mit Radius r um $L(0)$.

BEWEIS

Nach (4.4) ist L injektiv, es gilt:

$$DL(x, y) = I + D^2 E(x, y),$$

so dass insbesondere $\det DL(x, y) > 0$ ist für alle $(x, y) \in D$. Zusammen mit der Injektivität folgt, dass L ein globaler Diffeomorphismus von D auf $G := L(D)$ ist. Damit ist (4.5) klar, wenn G die ganze Ebene ist. Andernfalls existiert ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus G$ (abgeschlossen) mit

$$|\xi - L(0)| = \inf_{\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus G} |\eta - L(0)|.$$

Natürlich ist $\xi \in \partial(\mathbb{R}^2 \setminus G) = \partial G$, und man findet eine Folge $(\xi_k) \subset G$ mit $\xi_k \xrightarrow{k} \xi$. Sei $(x_k) \subset D$ mit $L(x_k) = \xi_k$, also die zugehörige Urbildfolge. Da (x_k) beschränkt in \mathbb{R}^2 ist, hat (x_k) nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_k) bezeichnen wollen, also:

$$x_k \xrightarrow{k} x \quad \text{für ein } x \in \overline{D}.$$

Offenbar ist aber $x \notin D$, denn sonst hätte man $\xi = L(x) \in G$, im Widerspruch zu $\xi \in \partial G$. Also ist $x \in \partial D$, d. h. es strebt $|x_k| \xrightarrow{k} R$, und (4.4) liefert

$$|L(x_k) - L(0)| > |x_k|, \quad \text{mithin } |\xi - L(0)| \geq R.$$

Ist also $\xi' \in D_r(L(0))$, d. h. $|\xi' - L(0)| < R$, so kann ξ' nicht in $\mathbb{R}^2 \setminus G$ liegen, weil

$$\inf_{\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus G} |\eta - L(0)| \geq R$$

ist. □

LEMMA 4.4

Sei $f : D_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der offenen Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ um den Ursprung. Man setzt wie im Beweis von Satz 3.2

$$\Lambda(x, y) = (x + \Phi(x, y), y + \Psi(x, y)), \quad (x, y) \in D_r(0),$$

wobei Φ, Ψ definiert sind durch

$$\partial_x \Phi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + \partial_x f^2),$$

$$\partial_y \Phi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_x f \partial_y f = \partial_x \Psi,$$

$$\partial_y \Psi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + \partial_y f^2).$$

Dann ist Λ ein Diffeomorphismus $D_r(0) \rightarrow G := \Lambda(D_r(0))$ mit

$$D_r(\Lambda(0)) \subset G.$$

BEWEIS

Gemäß $\partial_y \Phi = \partial_x \Psi$ findet man eine C^2 -Funktion $E : D_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\nabla E = (\Phi, \Psi) \quad \text{auf } D_r(0).$$

Man mache dazu den Ansatz:

$$E(x, y) := \int_0^1 x \Phi(tx, ty) + y \Psi(tx, ty) dt, \quad (\text{o. E. } E(0) = 0)$$

und rechne — mit $\partial_y \Phi = \partial_x \Psi$ — nach, dass $\nabla E = (\Phi, \Psi)$ gilt.

Nachzurechnen ist die positive Definitheit von $D^2 E$:

$$\partial_x^2 E = \partial_x \Phi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + \partial_x f^2),$$

$$\partial_x \partial_y E = \partial_y \Phi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_x f \partial_y f = \partial_x \Psi = \partial_y \partial_x E,$$

$$\partial_y^2 E = \partial_y \Psi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + \partial_y f^2),$$

so dass für $\eta := (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt:

$$\begin{aligned} D^2 E(\eta, \eta) &= (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \left[\eta_1^2 (1 + \partial_x f^2) + 2\eta_1 \eta_2 \partial_x f \partial_y f + \eta_2^2 (1 + \partial_y f^2) \right] \\ &\geq (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} |\eta|^2 \end{aligned}$$

gemäß

$$|2\eta_1\eta_2 \partial_x f \partial_y f| \leq \eta_1^2 \partial_x f^2 + \eta_2^2 \partial_x f^2.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3. \square

BEWEIS VON SATZ 4.1

Sei Λ wie in Lemma 4.4, wobei jetzt der Definitionsbereich von Λ die ganze Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist, und aus Lemma 4.3 folgt, dass Λ ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist. Dem Beweis von Satz 3.2 entnehmen wir weiter: Die Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto (\Lambda^{-1}(z), f \circ \Lambda^{-1}(z)) =: F(z) \in \mathbb{C}$$

(mit $z := x + iy = (x, y)$) ist eine konforme Parametrisierung von $S = G_f$. Nach Lemma 3.3 sind

$$\phi_k(z) := \partial_x F^k(z) - i \partial_y F^k(z), \quad k = 1, 2, 3,$$

auf \mathbb{C} holomorph mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\overline{\phi_1} \phi_2)(z) &= \partial_x F^2(z) \partial_y F^1(z) - \partial_x F^1(z) \partial_y F^2(z) = -\det D(F^1, F^2)(z) \\ &= -\det D\Lambda^{-1}(z) = -\frac{1}{\det D\Lambda(\Lambda^{-1}(z))} < 0, \end{aligned}$$

wobei die Positivität der Funktionaldeterminante von Λ benutzt wurde. Speziell sind ϕ_1, ϕ_2 nullstellenfrei und es ist

$$\operatorname{Im}(\phi_2/\phi_1) = |\phi_1|^{-2} \operatorname{Im}(\overline{\phi_1} \phi_2) < 0,$$

so dass $\psi := \phi_2/\phi_1$ auf \mathbb{C} holomorph ist und Imaginärteil < 0 hat. Folglich ist ϕ_2/ϕ_1 nach einer Variante des Satzes Liouville konstant:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{-i\psi(z)} = e^{-i \operatorname{Re} \psi(z)} e^{\operatorname{Im} \psi(z)}$$

ist holomorph auf \mathbb{C} und durch 1 beschränkt, also konstant. Das ergibt

$$0 = \frac{d}{dz} e^{-i\psi(z)} = -i \frac{d}{dz} \psi(z) e^{-i\psi(z)},$$

und da \exp ohne Nullstelle ist, folgt $\frac{d}{dz} \psi(z) = 0$, mithin ist (wegen $\operatorname{Im} \psi < 0$)

$$\phi_2 = c \phi_1, \quad c = a - ib, \quad b > 0.$$

Dies kann man schreiben als

$$\partial_x F^2 = a \partial_x F^1 - b \partial_y F^1, \quad \partial_y F^2 = b \partial_x F^1 + a \partial_y F^1.$$

Führt man die Koordinatentransformation $T := T^1 + iT^2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$T^1(\zeta) := \xi, \quad T^2(\zeta) := \frac{\eta - a\xi}{b} \quad (\zeta := \xi + i\eta)$$

ein und betrachtet $V := V^1 + iV^2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$V^1(z) := T^1 \circ (F^1, F^2)(z), \quad V^2(z) = T^2 \circ (F^1, F^2)(z) \quad (z := x + iy),$$

so folgt $\partial_x V^1 = \partial_x F^1$ und

$$\partial_y V^2 = \partial_y (b^{-1}(F^2 - aF^1)) = b^{-1} \partial_y F^2 - ab^{-1} \partial_y F^1 = \partial_x F^1,$$

also $\partial_x V^1 = \partial_x V^2$, und analog sieht man $\partial_y V^1 = -\partial_x V^2$. Also ist $V : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Damit rechnet man leicht nach, dass $\tilde{F} := F \circ V^{-1}$ ebenfalls konforme Parameterdarstellung von G_f ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^1(z) &= (F^1 \circ (T \circ (F^1, F^2))^{-1})(z) \\ &= (F^1 \circ (F^1, F^2)^{-1})(T^{-1}(z)) \\ &= (F^1 \circ (F^1, F^2))(x + i(ax + by)) = x, \end{aligned}$$

$$F^2(z) = ax + by,$$

mithin haben wir jetzt eine konforme Parametrisierung vom Typ

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto (\operatorname{Re} z, a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z, \tilde{F}^3(z)).$$

Bildet man die dazu gemäß Lemma 3.3 gehörigen holomorphen Funktionen $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3$, so folgt sofort

$$\tilde{\phi}_1 = \text{const}, \quad \tilde{\phi}_2 = \text{const} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

und aus $\sum_k \tilde{\phi}_k^2 = 0$ folgt $\tilde{\phi}_3^2 \equiv \text{const}$ in \mathbb{C} . Ist diese letzte Konstante 0, so folgt $\tilde{\phi}_3 = 0$. Andernfalls hat $\tilde{\phi}_3$ keine Nullstelle. Durch Ableiten der Gleichung $\tilde{\phi}_3^2 \equiv \text{const}$ folgt $\frac{d}{dz} \tilde{\phi}_3 = 0$, also in jedem Fall $\tilde{\phi}_3 = \text{const}$. Gemäß

$$\tilde{\phi}_3 = \partial_x F^3 - i \partial_y F^3$$

ist dann $\nabla F^3 \in \mathbb{R}^2$ (schreibe jetzt wieder (x, y) statt z) ein konstanter Vektor, und wir können schreiben

$$F^3(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, d. h. es ist

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, ax + by, \alpha x + \beta y + \gamma) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, \alpha x + \beta b^{-1}(y - ax) + \gamma); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \end{aligned}$$

woraus man $f(x, y) = (\alpha - \beta ab^{-1})x + \beta b^{-1}y + \gamma$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ abliest. \square

KOROLLAR

Eine beschränkte ganze Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ist konstant. (Denn die Konstanten sind die einzigen beschränkten affinen Funktionen.)

§ 5

Folgerungen aus der Struktur der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

In diesem Abschnitt studieren wir das Verhalten von C^2 - (und damit reell analytischen) Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad (5.1)$$

auf Gebieten in \mathbb{R}^2 . Es handelt sich bei (5.1) um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, für die man trotzdem eine Reihe, aus der Theorie der linearen elliptischen Gleichung zweiter Ordnung, bekannten Sätze nachmachen kann. Dazu gehören insbesondere sog. **Maximum-Prinzipien**, wo man die Größenordnung der Lösung auf einem Gebiet Ω durch das Verhalten der Randwerte beschreibt. Für einen allgemeinen Zugang vergleiche man etwa das ausgezeichnete Buch [Gilbarg, Trudinger]. Andererseits impliziert gerade die Nichtlinearität von (5.1) eine Reihe verblüffender Aussagen: Neben dem Satz von Bernstein hat man ein Theorem über die Hebbarkeit isolierter Punkte, d. h. gilt (5.1) nur auf einem punktierten Bereich, so kann man f glatt über den möglichen singulären Punkt hinaus fortsetzen.

SATZ 5.1 (Maximum-Prinzip)

Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen der Minimalflächengleichung (5.1) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann gilt

- (i) $f \leq g + M$ auf $\partial\Omega$ für ein $M \in \mathbb{R} \implies f \leq g + M$ auf Ω .
- (ii) $m + f \leq g$ auf $\partial\Omega$ für ein $m \in \mathbb{R} \implies m + f \leq g$ auf Ω .

KOROLLAR

Das Dirichletproblem zur Minimalflächengleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ hat — wenn überhaupt — nur eine Lösung, d. h.: Gibt man eine stetige Funktion $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vor, so gibt es höchstens eine Funktion $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit (5.1) und $f|_{\partial\Omega} = \phi$ (Dirichlet-Randbedingung).

BEMERKUNG

Das Korollar sagt natürlich gar nichts darüber aus, ob man zu gegebener Randfunktion ϕ lösen kann. Diese Diskussion ist viel schwerer und wird später geführt.

BEWEISSKIZZE ZU SATZ 5.1

Wir beschreiben hier eine Vorgehensweise, nämlich die Wahl geeigneter Testfunktionen, die in der allgemeinen Theorie partieller Differentialgleichungen sehr geläufig ist.

Multipliziert man die Gleichung (5.1) für f und g mit einer glatten Funktion φ , die auf $\partial\Omega$ verschwindet, so folgt nach Integration über Ω und Anwendung des Satzes von Gauß nach Subtraktion der resultierenden Identitäten:

$$0 = \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \right) \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Ist $f \leq g + M$ auf $\partial\Omega$, so wählt man

$$\varphi := \max(0, f - g - M).$$

Diese Funktion gehört zu $C^0(\bar{\Omega})$ mit $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega$, allerdings ist φ im Allgemeinen nur Lipschitz-stetig. Als Lipschitz-Funktion ist φ immerhin noch in fast allen Punkten von Ω differenzierbar mit

$$\nabla \varphi = (\nabla f - \nabla g) \cdot \chi_{[f > g + M]} \quad \text{f. ü. in } \Omega,$$

wobei $\chi_{[f > g + M]}$ die charakteristische Funktion der Menge $\{x \in \Omega : f(x) > g(x) + M\}$ bedeutet. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen beweist man durch Einführen geeigneter Räume, dass φ tatsächlich in obiger Integralidentität zugelassen ist; es folgt:

$$0 = \int_{[f > g + M]} (\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \right) dx.$$

Andererseits ist für $p, q \in \mathbb{R}^2$ und mit $\phi(t) := q + t(p - q)$ für $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} (p - q) \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1 + |p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1 + |q|^2}} \right) &= (p - q) \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((1 + |\phi(t)|^2)^{-1/2} \phi(t) \right) dt \\ &= \int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-1/2} |p - q|^2 - (\phi(t) \cdot (p - q))^2 (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} dt \\ &= \int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} \left[(1 + |\phi(t)|^2) |p - q|^2 - (\phi(t) \cdot (p - q))^2 \right] dt \\ &\geq \int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} dt |p - q|^2. \end{aligned}$$

Also ist der Integrand in $\int_{[f > g + M]} \cdots dx$ stets ≥ 0 , und das Verschwinden des Integrals bedeutet demnach

$$(\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \right) = 0 \quad \text{f. ü. in } [f > g + M].$$

Die wiederum ist nach der vorstehenden Abschätzung gleichwertig mit

$$\nabla f = \nabla g \quad \text{f. ü. in } [f > g + M],$$

also $\nabla \varphi = 0$ f.ü. in $[f > g + M]$; φ hat Randwerte 0 auf $\partial\Omega$ und wie bei glatten Funktionen gilt auch hier die Folgerung $\varphi = 0$, also $f \leq g + M$ auf Ω . \square

PRÄZISER BEWEIS ZU SATZ 5.1

Wir folgen dem ‘‘Vergleichssatz für quasilineare Gleichungen’’ aus [Gilbarg, Trudinger], Theorem 9.2. Sei Q der folgende Differentialoperator

$$Qu := \Delta u - \sum_{i,j} (1 + |\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u.$$

Offenbar ist $Qu = 0$ gleichwertig mit der nichtparametrischen Minimalflächengleichung (5.1). Wir nehmen an:

$$u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad Qu \geq Qv \text{ auf } \Omega, \quad u \leq v \text{ auf } \partial\Omega, \quad (5.2)$$

und wollen zeigen

$$u \leq v \text{ auf } \Omega. \quad (5.3)$$

Hieraus ergeben sich schnell (durch passende Wahlen von u, v) die Aussagen des vorstehenden Satzes.

Es ist nach (5.2)

$$\begin{aligned}
0 &\leq Q(u-v) = \Delta(u-v) - \sum_{i,j} (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u \\
&\quad + \sum_{i,j} (1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \partial_j v \partial_i \partial_j v \\
&= \Delta(u-v) - \sum_{i,j} (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u (\partial_i \partial_j u - \partial_i \partial_j v) \\
&\quad + \sum_{i,j} (1+|\nabla v|^2)^{-1} (\partial_i v \partial_j v - \partial_i u \partial_j u) \partial_i \partial_j v \\
&= \sum_{i,j} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2} \right] \partial_i \partial_j (u-v) \\
&\quad + \sum_{i,j} (1+|\nabla v|^2)^{-1} (\partial_i v \partial_j v - \partial_i u \partial_j u) \partial_i \partial_j v,
\end{aligned}$$

mit den Notationen $a_{ij}(p) := \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}$ ($p \in \mathbb{R}^2$) und $w = u - v$ also

$$0 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \partial_i \partial_j w + \sum_{i,j} [a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)] \partial_i \partial_j v.$$

Mit geeigneten stetigen Funktionen $\vartheta_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist

$$a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v) = \vartheta_{ij} \cdot (\nabla u - \nabla v), \quad (5.4)$$

denn für beliebige $p, q \in \mathbb{R}^2$ ist

$$a_{ij}(p) - a_{ij}(q) = \int_0^1 \frac{d}{dt} a_{ij}(q + t(p-q)) dt = (p-q) \cdot \int_0^1 \nabla a_{ij}(q + t(p-q)) dt,$$

also gilt (5.4) mit der Wahl

$$\vartheta_{ij}(x) := \int_0^1 \nabla a_{ij}(\nabla v(x) + t(\nabla u(x) - \nabla v(x))) dt.$$

Damit wird

$$\sum_{i,j} [a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)] \partial_i \partial_j v = \sum_{i,j} \vartheta_{ij} \cdot \nabla v \partial_i \partial_j v = \sum_k \left(\sum_{i,j} \vartheta_{ij}^k \partial_i \partial_j v \right) \partial_k w.$$

Setzen wir noch

$$b_k(x) := \sum_{i,j} \vartheta_{ij}^k \partial_i \partial_j v,$$

so bekommen wir die Differentialungleichung

$$0 \leq \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j w + \sum_k b_k \partial_k w =: Lw. \quad (5.5)$$

Die Koeffizienten b_k sind per Definition lokal beschränkt, stetige Funktionen auf Ω , und gemäß (5.2) haben wir die Zusatzinformation $w \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Zum Nachweis der

Behauptung (5.3) nehmen wir indirekt an, dass w im Inneren von Ω einen positiven Wert annimmt; $w|_{\partial\Omega} \leq 0$ bedeutet dann:

$$w(x_0) = \sup_{x \in \bar{\Omega}} w(x) > 0,$$

für ein $x_0 \in \Omega$. Insbesondere ist dann $\nabla w(x_0) = 0$ und $D^2w(x_0)$ negativ semidefinit, also $Lw(x_0) \leq 0$. Mithin bekommt man sofort einen Widerspruch, wenn man $Q(u) \geq Q(v)$ durch die stärkere Bedingung “>” ersetzt, was sich dann in $L(w) > 0$ niederschlägt.

Wie argumentiert man im allgemeinen Fall?

Sei $D \Subset \Omega$ ein beliebiges Teilgebiet. Sämtliche Koeffizienten des Differentialoperators L sind auf \bar{D} stetig, also insbesondere auch beschränkt. (Für das Gebiet Ω ist das nicht klar, denn u, v liegen nur in $C^2(\Omega)$ und nicht in $C^2(\bar{\Omega})$.) Man findet jetzt $\lambda > 0, b_0 > 0$ mit

$$\lambda |p|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} p_i p_j \quad \text{für alle } p \in \mathbb{R}^2, x \in \bar{D},$$

$$\frac{1}{\lambda} \sup_{x \in \bar{D}} |b(x)| \leq b_0.$$

Mit $\gamma > 0$ folgt (bachte $a_{11} \geq \lambda$)

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1) e^{\gamma x_1} \geq \lambda (\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1}$$

auf D , und wählt man γ genügend groß, so ist offenbar

$$Le^{\gamma x_1} > 0 \quad \text{auf } D.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ bekommt man

$$L(w + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0 \quad \text{auf } D,$$

und daraus schließt man für $w_\varepsilon := w + \varepsilon e^{\gamma x_1}$:

$$\sup_{x \in \bar{D}} w_\varepsilon(x) = \sup_{x \in \partial D} w_\varepsilon(x).$$

Würde nämlich $\sup_{\bar{D}} w_\varepsilon$ in einem Punkt $x_0 \in D$ angenommen, so hätte man dort wie vorhin ja $Lw_\varepsilon(x_0) \leq 0$. Mit $\varepsilon \downarrow 0$ impliziert das Randmaximumprinzip aber

$$\sup_{x \in \bar{D}} w(x) = \sup_{x \in \partial D} w.$$

Schließlich wählt man für D eine Ausschöpfung von Ω (also eine Folge $D_\nu \subset D_{\nu+1}$, $D_\nu \Subset \Omega$ mit $\bigcup_\nu D_\nu = \Omega$), die Stetigkeit von w bis zum Rand von Ω liefert:

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} w = \sup_{x \in \partial\Omega} w \leq 0,$$

und genau das wahr zu zeigen. □

BEMERKUNGEN

- (1) Die vorstehenden Rechnungen haben nirgendwo ausgenutzt, dass wir die nichtparametrische Minimalflächengleichung in nur zwei Dimensionen betrachten. Unser Ergebnis gilt wörtlich für Lösungen $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\operatorname{div} \left(\nabla f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right) = 0$$

auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

- (2) Ist der Definitionsbereich Ω unbeschränkt und/oder sind die Lösungen f, g der nichtparametrischen nicht stetig bis zum Rand $\partial\Omega$, so zeigt das Ausschöpfungsargument ($D \uparrow \Omega$) immerhin noch das folgende **Vergleichsprinzip**:

$$\liminf_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega} (f(x) - g(x)) \leq f(y) - g(y) \leq \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega} (f(x) - g(x))$$

für alle $y \in \Omega$. Hier bedeutet $\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega$, dass man sich dem Rand von Ω beliebig annähert.

Der vorstehende Satz 5.1 zeigt, dass sich das aus der Theorie der linearen, elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung bekannte Maximumprinzip durchaus auf Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ausdehnen lässt. Die nachfolgende Überlegung macht deutlich, dass man im nichtlinearen Fall oft viel stärkere Aussagen treffen kann:

Ist $\Omega = D_R(x_0) \setminus \overline{D}_r(x_0)$ ein Kreisring ($R > r > 0$), so lassen sich auf $\partial D_R(x_0)$, $\partial D_r(x_0)$ beliebige stetige Funktionen $\phi : \partial D_R(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \partial D_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ vorschreiben, zu denen man eine Lösung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des linearen Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial D_R(x_0)} = \phi, & u|_{\partial D_r(x_0)} = \varphi \end{cases}$$

konstruieren kann. Bei Minimalflächen ist das völlig anders: Lässt sich die Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der äußeren Sphäre $\partial D_R(x_0)$ durch ein Katenoid kontrollieren, so gilt diese Abschätzung bereits auf dem ganzen Kreisring. Mit anderen Worten: Die Randwerte auf $\partial D_r(x_0)$ können insbesondere nicht mehr beliebig sein. (Die genaue Formulierung findet man in Satz 5.2.) Zur Vorbereitung reden wir kurz über

Das Katenoid:

Das Katenoid wird analytisch beschrieben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = (\cosh z)^2$$

bzw. in Graphenform

$$z \pm \operatorname{ar} \cosh \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus D_1(0)$$

Wählt man das Vorzeichen $+$, so heißt der Graph von $z = \operatorname{ar\,cosh} \sqrt{x^2 + y^2}$ **oberes Halbkatenoid**, sonst unteres Halbkatenoid (Fig. 5.1).

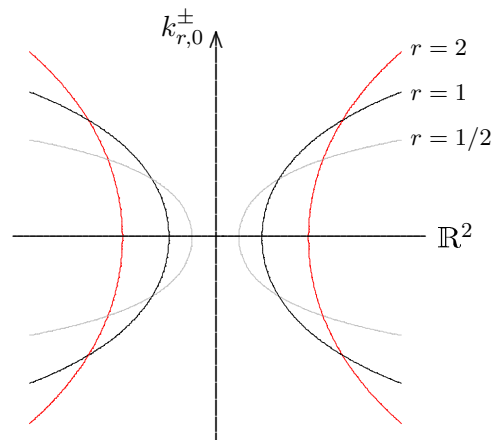


Fig. 5.1

Seien allgemeiner für $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}$

$$k_{r,a}^{\pm}(x, y) := \pm \operatorname{ar\,cosh} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \right) + a$$

und

$$K_{r,a}^{\pm} := G_{k_{r,a}^{\pm}}$$

mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus D_r(0)$. Wir schreiben kürzer k_r^{\pm} bzw. K_r^{\pm} , wenn $a = 0$ ist. Die Graphen $K_{r,a}^{\pm}$ gehen durch Ähnlichkeitstransformationen aus dem oberen bzw. unteren Halbkatenoid hervor, die Konstante a bewirkt z. B. eine vertikale Verschiebung (vgl. Fig. 5.1), und $k_{r,a}^{\pm}$ lösen auf ihrem Definitionsbereich die nichtparametrische Minimalflächengleichung.

SATZ 5.2

Seien $0 < r < R$ gegeben und sei $D \subset D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi)$ ein Gebiet. Sei f eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf D . Gilt dann für ein $a \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} [f(x) - k_{r,a}^-(x)] \leq 0$$

für alle Randpunkte $x_0 \in \partial D \setminus \partial D_r(\xi)$, so ist

$$f(x) \leq k_{r,a}^-(x) \quad \text{für alle } x \in D$$

(vgl. dazu Fig. 5.2).

BEMERKUNG

Der Spezialfall $D = D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi)$ verdient besondere Beachtung: Weiß man $f \leq k^-$ auf dem Rand der äußeren Kreisscheibe, so gilt $f \leq k^-$ auf dem ganzen Ring. Daraus bekommt man den

Einschließungssatz für Minimalflächen:

Ist $f : D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung, und bezeichnet k^\pm das auf $\mathbb{R}^2 \setminus D_r(\xi)$ definierte obere bzw. untere Halbkatenoid, mit

$$k^+ \leq f \leq k^- \quad \text{auf } \partial D_R(\xi),$$

so hat man $k^+ \leq f \leq k^-$ auf $D_R(\xi) \setminus \overline{D}_r(\xi)$ (vgl. Fig. 5.2).

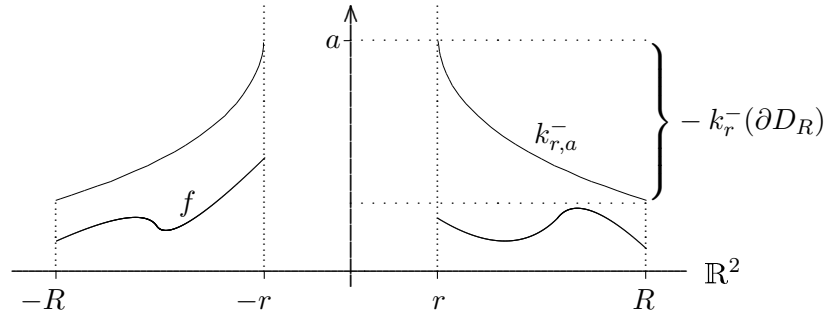


Fig. 5.2

BEWEIS VON SATZ 5.2

Ohne Einschränkung sei $r := 1$, $a := 0$ und $D := D_R(0) - \overline{D}_1(0)$. Für $1 < r < R$ sei

$$\varepsilon := \sup_{r \leq |x| \leq R} |k^-(x) - k_r^-(x)|,$$

wobei $k^- := k_1^-$ ist. Ferner nehmen wir an, dass f auf \overline{D} stetig ist und $f \leq k^-$ auf $D_R(0)$ erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: f ist stetig differenzierbar auf \overline{D} . Dann können wir direkt argumentieren und brauchen das Hilfskatenoid nicht einzuführen. Gilt sogar $f \leq k^-$ auf $\partial D_1(0)$, so ist die globale Aussage direkte Folge aus dem Maximum-Prinzip (Satz 5.1). Ist $f > k^-$ irgendwo auf $\partial D_1(0)$, so wählt man ein $x_0 \in \partial D_1(0)$ mit

$$0 < f(x_0) - k^-(x_0) =: M = \max_{x \in \partial D_1(0)} f(x) - k^-(x),$$

und Satz 5.1 impliziert $f(x) - k^-(x) \leq M$ auf dem ganzen Ring D . Für z mit $|z| > 1$ ist

$$\nabla k^-(z) = -\frac{1}{\sqrt{|z|^2 - 1}} z,$$

also gilt für

$$\Phi(t) := f(tx_0) - k^-(tx_0), \quad t > 1,$$

(beachte: $tx_0 \in D$ für $t \in (1, R)$) offenbar

$$\Phi'(t) = x_0 \cdot \nabla f(tx_0) + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0,$$

denn ∇f ist nach Voraussetzung ja beschränkt. Mithin ist Φ streng wachsend und

$$\Phi(t) > M \quad \text{für } t > 1,$$

was aber $f(x) - k^-(x) \leq M$ auf D widerspricht.

Fall 2: f ist nicht notwendig C^1 auf \overline{D} . Dann gilt:

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial D_R(0).$$

Sei $D^r := D_R(0) \setminus \overline{D}_r(0)$. Im Fall

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial B_r(0)$$

liefert Satz 5.1

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } D^r. \quad (5.6)$$

Im anderen Fall existiert ein $x_0 \in \partial D_r(0)$ mit

$$rm := f(x_0) - k_r^-(x_0) = \max_{x \in \partial D_r(0)} f(x) - k_r^-(x) > \varepsilon$$

und Satz 5.1 ergibt

$$f - k_r^- \leq m \quad \text{auf } D^r. \quad (5.7)$$

Gemäß $r > 1$ ist $\nabla f(x_0)$ beschränkt (x_0 ist innerer Punkt von D), und durch Betrachten des Gradienten von k_r^- sieht man (wie vorhin):

$$f(x) - k_r^-(x) > f(x_0) - k_r^-(x_0)$$

für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0 in D^r , was (5.7) widerspricht. Die Annahme war also falsch, und es folgt (5.6). Lässt man r von oben gegen 1 gehen, so liefert (5.6) sofort $f \leq k^-$ auf D , denn die Katenoide konvergieren gleichmäßig gegeneinander. Die allgemeine Aussage von Satz 5.2 folgt durch ähnliche Betrachtungen. \square

Wir kommen jetzt zum Satz von Bers (1951) (vgl. [Nitsche], S. 549 oder [Osserman], Thm. 10.2) über die Hebbarkeit isolierter Singularitäten, der sich völlig aus der linearen Theorie heraushebt: Ist D' eine Kreisscheibe um 0, aus der der Ursprung herausgenommen wurde und

$$u : D' \rightarrow \mathbb{R}$$

eine C^2 -Lösung der linearen Gleichung $\Delta u = 0$ auf D' , so lässt sich die Singularität bei 0 i. a. nicht heben, d. h. ohne weitere Voraussetzungen ist es i. a. nicht möglich, u als glatte Lösung in den Ursprung hinein fortzusetzen. Dies zeigt das Beispiel der Funktion

$$u(x, y) := \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Als Vorbereitung für den Satz von Bers beweisen wir zunächst die Beschränktheit von nichtparametrischen Minimalflächen an isolierten Singularitäten.

SATZ 5.3

Sei f eine C^2 -Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe

$$\dot{D}_R(0) := D_R(0) \setminus \{0\},$$

außerdem sei f stetig auf $\overline{D}_R(0) \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\sup_{x \in \dot{D}_R(0)} f(x) \leq \sup_{x \in \partial D_R(0)} f(x),$$

$$\inf_{x \in \dot{D}_R(0)} f(x) \geq \inf_{x \in \partial D_R(0)} f(x).$$

BEMERKUNG

Im vorstehenden Satz kennt man das Randverhalten von $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bis auf einen möglichen Punkt aus $\partial\Omega$. Trotzdem gilt das bekannte Randmaximumprinzip. Allgemeiner kann man $f \in C^2(\Omega)$ diskutieren, wo endlich viele Ausnahmepunkte $p_1, \dots, p_m \in \partial\Omega$ zugelassen sind. Dann bekommt man immerhin noch

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_m\}} f(x),$$

und eine entsprechend Ungleichung für das Infimum.

Die übliche Anwendung sieht so aus: Ω ist ein ebenes Gebiet, das aus einem anderen Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ durch Entfernen endlich vieler innerer Punkte $p_1, \dots, p_m \in D$ entsteht, also

$$\Omega = D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}, \quad \partial\Omega = \partial D \cup \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Ist f dann z. B. aus $C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \partial D)$, so folgt

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega \setminus \{p_1, \dots, p_m\}} f(x) = \sup_{x \in \partial D} f(x),$$

mithin

$$\sup_{x \in \Omega} f(x) \leq \sup_{x \in \partial D} f(x),$$

so dass f bei Annäherung an die singulären Stellen p_1, \dots, p_m beschränkt bleibt. (Nach Bers sind die Singularitäten sogar hebbar.) "Singuläre Strecken" ℓ sind verboten: Entsteht Ω aus D durch Entfernen einer eindimensionalen Menge, so ist das o. g. Maximum-Prinzip i. a. verletzt. \square

BEWEIS VON SATZ 5.3

Für $0 < r \leq R$ sei

$$M(r) := \sup_{x \in \partial D_r(0)} f(x).$$

In Abhängigkeit von r sei $a = a(r)$ so gewählt, dass

$$g_r := k_{r,a}^- = M(R) \quad \text{auf } \partial D_R(0)$$

erfüllt ist (vgl. Fig. 5.2), d. h. es ist (wähle $a := -k_r^-(\partial D_R(0)) + M(R)$)

$$g_r(x) = r \left[-\operatorname{ar} \cosh \left(\frac{|x|}{r} \right) + \operatorname{ar} \cosh \left(\frac{R}{r} \right) \right] + M(R) \quad \text{für alle } |x| \geq r.$$

Aus $f \leq g_r$ auf $\partial D_R(0)$ bekommt man mit Satz 5.2:

$$f \leq g_r \quad \text{auf } D_R(0) \setminus D_r(0).$$

Ist nun $x \in \dot{D}_R(0)$ beliebig, so gilt vorstehende Ungleichung insbesondere für alle $r < |x|$, unter Ausnutzung von

$$g_r(x) \xrightarrow{r \downarrow 0} M(R)$$

bekommt man schließlich $f(x) \leq M(R)$. □

SATZ 5.4 (Satz von Bers)

Sei $f : \dot{D}_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe $\dot{D}_R(0)$. Dann lässt sich f glatt in den Ursprung hinein fortsetzen und löst die Minimalflächengleichung auf der ganzen Kreisscheibe $D_R(0)$.

BEWEIS

Wir benutzen hier einen Existenzsatz für das Dirichlet-Problem auf Kreisscheiben bei C^2 -Randwerten für die nichtparametrische Minimalflächengleichung. Dazu sei f o. E. als C^2 -Funktion in der Nähe von $\partial D_R(0)$ vorausgesetzt (ggf. verkleinere man einfach den Radius). Aus Satz 5.3 folgt

$$\sup_{x \in \dot{D}_R(0)} |f(x)| \leq \sup_{x \in \partial D_R(0)} |f(x)|,$$

also Beschränktheit von f . Sei $\tilde{f} \in C^2(\overline{D}_R(0))$ nun die C^2 -Lösung der Minimalflächengleichung mit

$$\tilde{f}|_{\partial D_R(0)} = f|_{\partial D_R(0)}.$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon \in (0, R)$

$$\begin{aligned}
& \int_{D_R(0) \setminus D_\varepsilon(0)} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx \\
&= \int_{D_R(0) \setminus D_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \left((f - \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}|^2}} \right) \right) dx \\
&= \int_{D_R(0) \setminus D_\varepsilon(0)} (f - \tilde{f}) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx \\
&= \int_{\partial(D_R(0) \setminus D_\varepsilon(0))} (f - \tilde{f}) \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}|^2}} \right) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1,
\end{aligned}$$

wobei wir die Minimalflächengleichung und den Satz von Gauß ausgenutzt haben (ν bezeichnet dabei die äußere Normale an $\partial(D_R(0) \setminus D_\varepsilon(0)) = \partial D_R(0) \cup \partial D_\varepsilon(0)$).

Das Integral über $\partial D_R(0)$ verschwindet offenbar nach Wahl von \tilde{f} . Auf $\partial D_\varepsilon(0)$ benutzt man die Beschränktheit des Integranden (f und \tilde{f} sind ja beschränkt und es ist $|\nabla f|/\sqrt{1 + |\nabla f|^2} \leq 1$, etc.). Es folgt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{D_R(0) \setminus D_\varepsilon(0)} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx = 0.$$

Wie wir uns früher aber schon überlegt haben, ist der Integrand stets ≥ 0 und verschwindet nur, wenn $\nabla f = \nabla \tilde{f}$ im betreffenden Punkt gilt. Speziell ist nun

$$\int_{\dot{D}_R(0)} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1 + |\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx = 0,$$

mithin

$$\nabla f = \nabla \tilde{f} \quad \text{auf } \dot{D}_R(0),$$

also $f - \tilde{f} = \text{const}$ auf $\dot{D}_R(0)$. Da aber $f - \tilde{f}$ auf $\partial D_R(0)$ verschwindet, muss $\tilde{f} = f$ bis auf den Ursprung sein, so dass man f durch $f(0) := \tilde{f}(0)$ wie gewünscht glatt fortsetzen kann. \square

Für weitere Informationen über Hebbarkeitssätze vergleiche man die Bemerkungen in [Osserman] auf S. 98.

§ 6

Das Dirichlet–Problem für die nichtparametrische Minimalflächengleichung

Literatur: [Nitsche], Kap. 7, § 635 ff.
[Massari, Miranda], Chapter III

Wir beschreiben den von Haar (1927 in [Haar]) entwickelten Zugang zur Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 & \text{auf } \Omega \\ f|_{\partial\Omega} = \Phi \end{cases}$$

bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) und Randfunktion $\Phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei ausdrücklich betont, dass die Raumdimension n jetzt beliebig ≥ 2 sein darf.

Wie früher bemerkt, gewinnt man Lösungen durch Minimieren des Flächenfunktional

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx$$

in geeigneten Klassen von Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{\partial\Omega} = \Phi$, also mit Methoden der Variationsrechnung. Dabei steht man allerdings vor dem Problem, dass zum Beispiel C^k -Minimalfolgen ($k \geq 1$) a priori nicht konvergent sein müssen, d. h. man steht vor der Notwendigkeit, A_Ω auf Räumen “verallgemeinerter Funktionen” zu studieren und nachträglich die Regularität der Extremale zu beweisen.

Der Zugang von Haar ist ein “Mittelweg”, bei dem die “verallgemeinerten Funktionen” immerhin noch Lipschitz–stetig sind. In den 1950er Jahren gab De Giorgi einen viel größer gesteckten Rahmen, indem er das Problem im Raum $BV(\Omega)$ studierte (das sind $L^1(\Omega)$ -Funktionen, deren erste Distributionsableitung durch ein Radon–Maß erzeugt wird).

Bevor wir zu den Einzelheiten kommen, wollen wir kurz einige notwendige Bedingungen für die Existenz glatter Lösungen diskutieren (*BV*-Lösungen findet man immer, aber deren Graphen können senkrechte Stücke haben.)

(1) **Konvexität des Definitionsgebiets Ω :**

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nicht konvex, hat also die Form, so kann man nicht für jede Vorgabe von Randwerten die Existenz einer Lösung erwarten. Seifenfilmexperimente zeigen, dass die "tatsächliche Minimalfläche" i. a. gar kein Graph über Ω ist.

(2) Lösungen, deren Gradient zum Rand hin unbeschränkt anwächst, muss man erwarten, wenn Ω zwar konvex, aber nicht streng konvex ist, d. h. wenn $\partial\Omega$ gerade Stücke enthält.

Man wird also **strenge Konvexität** von Ω fordern müssen: Es gibt eine Kugel $\overline{B}_r(x_0)$ (mit festem Radius r), die man von innen an jeden Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ legen kann und die $\partial\Omega$ genau nur in diesem Randpunkt berührt. Anschaulich heißt dies, dass $\partial\Omega$ überall gleich stark gekrümmt ist. Der Zugang von Haar vollzieht sich nun in mehreren Schritten, wir beginnen mit

I. Die Klasse $\text{Lip}(\Omega)$ und erste Eigenschaften des Funktionals A_Ω

Hier sei Ω zunächst nur ein beschränktes **konvexes** Gebiet in \mathbb{R}^n .

DEFINITION

- (i) Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf Ω , falls es eine Konstante $M \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

für alle $x, y \in \Omega$. Die kleinste Zahl M mit dieser Eigenschaft heißt die Lipschitz-Konstante $\text{Lip}(f)$ von f .

- (ii) Der Raum $\text{Lip}(\Omega)$ besteht aus allen beschränkten Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichzeitig einer Lipschitz-Bedingung genügen.

Für Lipschitz-Funktionen gilt der berühmte

SATZ (Rademacher)

Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so existiert in Lebesgue fast jedem Punkt von Ω die Ableitung von f . Man hat in den Differenzierbarkeitsstellen $x \in \Omega$ die Abschätzung

$$|\nabla f(x)| \leq \text{Lip}(f),$$

wobei $\nabla f(x)$ wie üblich den Gradienten von f bei x bezeichnet.

Den Beweis findet man bei [Federer] oder auch in der Monographie [Simon], Kap. 2.

Nach dem Satz von Rademacher macht die Definition

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx$$

auch für Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Sinn, die nur Lipschitz-stetig auf dem Bereich Ω sind. Der Gradient existiert ja außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge, und diese spielt beim Integrieren keine Rolle. Es gilt:

SATZ 6.1

- (i) A_Ω ist ein auf $\text{Lip}(\Omega)$ **konvexes** Funktional.
(ii) Ist $\mathcal{C} \subset \text{Lip}(\Omega)$ eine konvexe Teilmenge, die nicht zwei nur durch ein Konstante verschiedene Funktionen enthält, so ist A_Ω auf \mathcal{C} sogar **streng konvex**. (Eine solche Klasse \mathcal{C} kann z. B.

$$\{f \in \text{Lip}(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \Phi, f \in C^0(\bar{\Omega})\}$$

mit gegebener Randfunktion Φ sein.)

- (iii) A_Ω ist **unterhalbstetig** bzgl. gleichmäßiger Konvergenz bei beschränkten Lipschitz Konstanten, d. h.: Gilt $f_m \xrightarrow{m} f$ gleichmäßig auf Ω und ist $\sup_m \text{Lip}(f_m) < \infty$, so folgt

$$A_\Omega(f) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_\Omega(f_m).$$

BEWEIS

- (i) Man hat für $f, g \in \text{Lip}(\Omega)$ und $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} A_\Omega(tf + (1-t)g) &= \int_\Omega \sqrt{1 + |t\nabla f + (1-t)\nabla g|^2} \, dx \\ &= \int_\Omega \|t(1, \nabla f) + (1-t)(1, \nabla g)\| \, dx, \end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|$ für die euklidische Norm auf \mathbb{R}^{n+1} steht. Für beliebige Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\|t\xi + (1-t)\eta\| \leq t\|\xi\| + (1-t)\|\eta\|$$

mit “=” genau nur für $t = 0$ oder $t = 1$ oder $\xi = \eta$. Also ist

$$\begin{aligned} A_\Omega(tf + (1-t)g) &\leq t \int_\Omega \|(1, \nabla f)\| \, dx + (1-t) \int_\Omega \|(1, \nabla g)\| \, dx \\ &= tA_\Omega(f) + (1-t)A_\Omega(g) \end{aligned}$$

mit “=” nur für $t = 0$, $t = 1$ oder $\nabla f = \nabla g$ fast überall. Daraus liest man die Konvexität von A_Ω ab.

- (ii) Nehmen wir $0 < t < 1$ und $f, g \in \mathcal{C}$ an, so folgt aus

$$A_\Omega(tf + (1-t)g) = tA_\Omega(f) + (1-t)A_\Omega(g)$$

gemäß obiger Rechnung $\nabla f = \nabla g$ fast überall. Für Lipschitz-Funktionen gilt nun aber wie im C^1 -Fall: $\nabla \varphi = 0$ f.ü. impliziert $\varphi = \text{const.}$ Mithin folgt aus der Wahl von \mathcal{C} , dass $f = g$ sein muss.

(iii) Wir erinnern an folgende Aussagen: Ist $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine auf Ω integrierbare Funktion, also $g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, so ist

$$\int_{\Omega} \|g\| dx = \sup_{\substack{V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \\ \|V\|_\infty \leq 1}} \int_{\Omega} g \cdot V dx, \quad (6.1)$$

wo “ \cdot ” das übliche Skalarprodukt (mit Norm $\|\cdot\|$) bezeichnet. Dies folgt aus der bekannten Dualraumdarstellung

$$L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})^* = L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),$$

die sagt, dass stetige lineare Funktionale $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ genau als Integrale mit $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ -Funktionen geschrieben werden können.

Ist allgemeiner $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit Dualraum X^* , so bekommt man als eine Konsequenz des Satzes von Hahn–Banach die Charakterisierung

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ |\varphi| \leq 1}} \varphi,$$

und genau diese Eigenschaft führt mit der Wahl $X := L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ auf die Identität (6.1).

Seien nun f, f_m wie in (iii) vorausgesetzt. Mit $M := \sup_m \text{Lip}(f_m)$ gilt natürlich auch $\text{Lip}(f) \leq M$, wie man aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_m \rightarrow f$ unschwer erkennt. Nach (6.1) wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ mit $\|V\|_\infty \leq 1$, so dass

$$A_\Omega(f) \leq \varepsilon + \int_{\Omega} V \cdot (1, \nabla f) dx$$

ausfällt. Da Ω beschränkt ist, gilt

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),$$

und bekanntlich liegt $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ bzgl. der L^1 -Norm. Also finden wir eine Funktion $\tilde{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ mit

$$\int_{\Omega} \|V - \tilde{V}\| dx \leq \varepsilon.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} A_\Omega(f) &\leq \varepsilon + \int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f) dx + \int_{\Omega} (V - \tilde{V}) \cdot (1, \nabla f) dx \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 + M^2} + \int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f) dx. \end{aligned}$$

Für Lipschitz-Funktionen gilt der Divergenzsatz:

$$\int_{\Omega} (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \cdot \nabla f dx = - \int_{\Omega} f \operatorname{div} (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) dx$$

(Randterme hat man keine, denn \tilde{V} verschwindet ja bei $\partial\Omega$). Also gilt gemäß $f_m \rightarrow f$ gleichmäßig:

$$\begin{aligned} A_\Omega(f) &\leq \varepsilon(1 + \sqrt{1 + M^2}) + \int_\Omega \tilde{v}_1 - f \operatorname{div}(\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \, dx \\ &= \varepsilon(1 + \sqrt{1 + M^2}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega \tilde{v}_1 - f_m \operatorname{div}(\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \, dx \\ &= \varepsilon(1 + \sqrt{1 + M^2}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \, dx. \end{aligned}$$

Schließlich ist wie eben (wegen $\int_\Omega V \cdot (1, \nabla f_m) \, dx \leq A_\Omega(f_m)$)

$$\int_\Omega \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \, dx \leq \int_\Omega V \cdot (1, \nabla f_m) \, dx + \varepsilon\sqrt{1 + M^2} \leq A_\Omega(f_m) + \varepsilon\sqrt{1 + M^2},$$

also

$$A_\Omega(f) \leq \varepsilon(1 + 2\sqrt{1 + M^2}) + \liminf_{m \rightarrow \infty} A_\Omega(f_m).$$

Da man hierbei $\varepsilon > 0$ noch beliebig wählen darf, folgt (iii). \square

Eine allgemeinere Unterhalbstetigkeitsaussage bzgl. gleichmäßiger Lipschitz-Konvergenz für Funktionale der Form

$$\mathcal{F}(f) = \int_\Omega \Phi(\nabla f) \, dx$$

mit beliebiger konvexer Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ findet man in [Massari, Miranda], Kap. III.

II. Diskussion approximativer Probleme

Bei konvexem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Randfunktion, von der wir annehmen: φ hat eine Fortsetzung als Element von

$$\operatorname{Lip}(\Omega) = \{ \text{alle Lipschitz-stetigen Funktionen } \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \}.$$

(Man beachte hier die kleine Abweichung von unserer früheren Definition dieses Raumes; die Lipschitz-Stetigkeit soll hier bis zum Rand gehen. Das spielt aber letztendlich keine Rolle, denn eine Lipschitz-Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf beschränktem Ω lässt sich immer unter Erhaltung der Lipschitz-Konstante auf $\overline{\Omega}$ ausdehnen.)

Die Fortsetzung von φ werde wieder mit φ bezeichnet. Für

$$R \geq \operatorname{Lip}(\varphi)$$

sei

$$\operatorname{Lip}_R(\Omega, \varphi) := \{ f \in \operatorname{Lip}(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \operatorname{Lip}(f) \leq R \},$$

also die Menge aller Funktionen $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, die am Rand mit φ übereinstimmen und deren Lipschitz-Konstanten gleichmäßig durch R beschränkt sind. Dann gilt:

SATZ 6.2

In $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$ gibt es genau eine Minimalstelle des Flächenfunktional A_Ω , d. h. man findet genau ein $f_R \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$ mit

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f) \quad \text{für alle } f \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi).$$

Der Beweis benutzt die **direkte Methode der Variationsrechnung**:

Sei (f_m) eine Minimalfolge in $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, d. h. per Definition:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_\Omega(f_m) = \inf_{f \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi)} A_\Omega(f).$$

Es gilt $\text{Lip}(f_m) \leq R$ und deshalb mit fixiertem $x_0 \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} |f_m(x)| &\leq |f_m(x_0)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| \\ &\leq |\varphi(x_0)| + R|x - x_0| \leq |\varphi(x_0)| + R \text{diam}(\Omega), \end{aligned}$$

also ist die Folge (f_m) gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli gibt es eine Teilfolge (wieder (f_m) genannt) und eine Funktion $f \in C^0(\bar{\Omega})$ mit

$$f_m \xrightarrow{m} f \text{ gleichmäßig auf } \bar{\Omega}.$$

Trivialerweise ist $f \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, die Minimalität folgt aus Teil (iii) von Satz 6.1, denn:

$$A_\Omega(f) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_\Omega(f_m) = \inf_{\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)} A_\Omega.$$

Die Eindeutigkeit der Minimalstelle schließt man aus (ii) von Satz 6.1. □

BEMERKUNG

Es ist keineswegs klar, ob die Funktion f_R tatsächlich Lösung unseres ursprünglichen Problems

$$A_\Omega(\cdot) \rightarrow \min \text{ in } \text{Lip}(\Omega) \cap \{f|_{\partial\Omega} = \varphi\}$$

ist, denn die Minimalstelle (sofern sie existiert) könnte ja durchaus Lipschitz-Konstante $> R$ haben, und f_R minimiert nur in der eingeschränkten Klasse. Diesen Aspekt werden wir später wieder aufgreifen.

SATZ 6.3

- (i) Ist Ω' ein konvexes Teilgebiet von Ω , so ist $f_R|_{\Omega'}$ $A_{\Omega'}$ -minimal in der Klasse $\text{Lip}_R(\Omega', f_R|_{\partial\Omega'})$.
- (ii) Sei ψ eine Lipschitz-Funktion mit $\text{Lip}(\psi) \leq R$ und $\varphi \leq \psi$ auf $\partial\Omega$, und g_R sei A_{Ω} -minimal in $\text{Lip}_R(\Omega, \psi)$. Dann ist $f_R \leq g_R$ auf $\bar{\Omega}$. Streicht man die Voraussetzung " $\varphi \leq \psi$ " auf $\partial\Omega$, so ist

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |f_R(x) - g_R(x)| \leq \sup_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

- (iii) Ist $f \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf Ω , so folgt $f = f_R$.

BEWEIS

- (i) Angenommen, es gibt eine Funktion $g \in \text{Lip}_R(\Omega', f_R|_{\partial\Omega'})$ mit

$$A_{\Omega'}(g) < A_{\Omega'}(f_R|_{\Omega'}).$$

Dann setzt man

$$\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{auf } \Omega' \\ f_R & \text{auf } \Omega \setminus \Omega'. \end{cases}$$

Dann ist \tilde{f} stetig auf $\bar{\Omega}$ mit Randwerten φ . Zu zeigen ist $\text{Lip}(\tilde{f}) \leq R$. Dazu wählen wir $x, y \in \Omega$ und haben zu zeigen

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq R|x - y|,$$

was für $x, y \in \bar{\Omega}'$ oder $x, y \in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}'$ klar ist. In der Diskussion bleibt der Fall

$$x \in \Omega \setminus \Omega', y \in \Omega'.$$

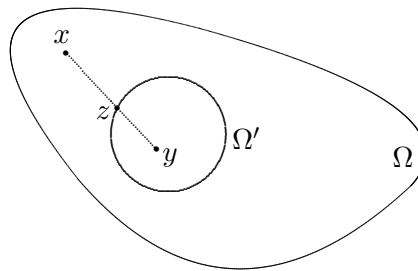


Fig. 6.1

Dann verbindet man x und y durch eine Strecke, $z \in \partial\Omega'$ sei der Punkt, wo diese Strecke den Rand $\partial\Omega'$ trifft (Fig. 6.1). Dann ist

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| &\leq |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(z) - \tilde{f}(y)| \\ &= |f_R(x) - f_R(z)| + |g(z) - g(y)| \leq R(|x - z| + |x - y|) = R|x - y|. \end{aligned}$$

Mithin ist $\tilde{f} \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, also

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(\tilde{f}),$$

was aber $A_{\Omega'}(f_R) \leq A_{\Omega'}(g)$ bedeutet; Widerspruch!

(ii) Die Funktion $h_R := \min(f_R, g_R)$ gehört zu $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, also ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx &= A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(h_R) \\ &= \int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx + \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx, \end{aligned}$$

und damit

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx \leq \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx. \quad (6.2)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass

$$\nabla \min(\eta, \rho) = \begin{cases} \nabla \eta & \text{f. ü. auf } [\eta \geq \rho] \\ \nabla \rho & \text{f. ü. auf } [\eta \leq \rho] \end{cases}$$

ist, wenn η, ρ beliebige Lipschitz-Funktionen sind. Entsprechendes gilt für $\max(\eta, \rho)$

Analog gehört $H_R := \max(f_R, g_R)$ zu $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, und es folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx &= A_\Omega(g_R) \leq A_\Omega(H_R) \\ &= \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx + \int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx, \end{aligned}$$

also

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx \leq \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx. \quad (6.3)$$

Aus (6.2) und (6.3) folgt:

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} dx = \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} dx,$$

so dass also $A_\Omega(f_R) = A_\Omega(h_R)$ ist, was wegen der Eindeutigkeit der Minimalstelle f_R in $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$

$$f_R = h_R = \min(f_R, g_R),$$

mithin $f_R \leq g_R$ auf Ω bedeutet, woraus mit der Voraussetzung $\varphi \leq \psi$ auf $\partial\Omega$ die Behauptung $f_R \leq g_R$ auf $\bar{\Omega}$ folgt.

Nun wird die Voraussetzung $\varphi \leq \psi$ auf $\partial\Omega$ entfernt. Sei

$$M := \sup_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Offenbar ist $g_R + M$ A_Ω -minimal in $\text{Lip}_R(\Omega, \psi + M)$. Gemäß $\psi + M \geq \varphi$ auf $\partial\Omega$ folgt aus dem Bisherigen:

$$f_R - g_R \leq M \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Analog beweist man $f_R - g_R \geq -M$ auf $\bar{\Omega}$.

(iii) Sei $g \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$. Dann ist nach dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_0 A_\Omega(f + t(g - f)) &= \int_\Omega \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \cdot \nabla(g - f) \, dx \\ &= \int_\Omega \text{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (f - g) \, dx = 0, \end{aligned}$$

d. h. die konvexe Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto A_\Omega(f + t(g - f))$ hat einen kritischen Punkt bei $t = 0$. Dann liegt in $t = 0$ eine Minimalstelle vor, also ist

$$A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g),$$

mithin $f = f_R$ wegen der Eindeutigkeit des Minimierers f_R . \square

Wie bereits erwähnt, sind die Graphen der Funktionen f_R keine Flächen kleinsten Inhalts zu fixierten Randwerten φ , denn der Gradient der Minimalfläche könnte ja größer als R ausfallen. Wenn man aber geometrische Bedingungen an Ω und die Randwerte φ finden kann, die a priori eine Lipschitz-Bedingung $\text{Lip } f \leq K$ für die Fläche kleinsten Inhalts erwarten lassen, so wird man hoffen dürfen, dass f_R mit $R > K$ tatsächlich kleinsten Inhalt unter allen Lipschitz-Flächen mit Randwerten φ hat. Solche Bedingungen an Ω und φ werden wir jetzt beschreiben.

III. Die Bounded-Slope-Condition

Wie bisher sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und konvexes Gebiet und $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Randfunktion. Dann interessiert uns die zugehörige Randmannigfaltigkeit

$$\Gamma := \left\{ (z, \varphi(z)) : z \in \partial\Omega \right\},$$

also einfach der Graph von φ .

DEFINITION

Die Randmannigfaltigkeit Γ erfüllt eine Bounded-Slope-Condition (beschränkte Steigung) mit Konstante $K \geq 0$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Punkt $p = (x_0, \varphi(x_0)) \in \Gamma$ gibt es affin-lineare Funktionen $L_p^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L_p^\pm(x) = a^\pm \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0), \quad a^\pm = a^\pm(p) \in \mathbb{R}^n$$

mit den Eigenschaften

- (i) $L_p^-(x) \leq \varphi(x) \leq L_p^+(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$,
- (ii) $|a^\pm| \leq K$.

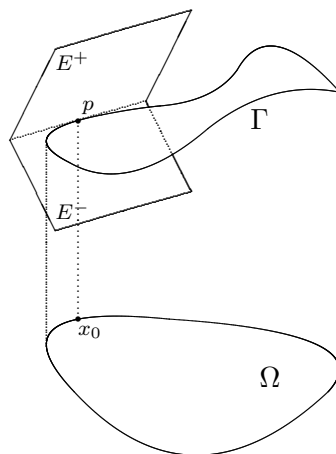


Fig. 6.2

Was sagt die B. S. C. anschaulich?

Fixiert man einen beliebigen Punkt $p \in \Gamma$, so findet man dazu zwei nicht vertikale Hyperebenen E^+ und E^- (also Graphen über \mathbb{R}^n), deren Steigung einerseits durch die vorgegebene Konstante K beschränkt ist, die den Punkt p enthalten und andererseits die Randmannigfaltigkeit Γ in das keilförmige Gebiet G einschließen, das aus dem Durchschnitt aller Punkte in \mathbb{R}^{n+1} besteht, die gleichzeitig unterhalb der Ebene E^+ und oberhalb der Ebene E^- liegen (vgl. Fig. 6.2).

BEMERKUNGEN (vgl. [Gilbarg, Trudinger], S. 309 ff.)

- (1) In [Hartman] wird folgende Aussage gezeigt: Sind φ und $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 , und ist Ω uniform konvex, d. h. lässt sich von innen eine Kugel mit festem Radius an jeden Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ legen, die $\partial\Omega$ genau nur in x_0 berührt, so erfüllt Γ die B. S. C. mit einer Konstanten K , die durch die Krümmung von $\partial\Omega$ und durch Schranken auf der ersten und zweiten Ableitungen von φ bestimmt wird. Anders formuliert: Ist Ω ein vernünftiges konvexes Gebiet, also z. B. eine Kugel in \mathbb{R}^n (Kreisscheibe im zweidimensionalen Fall), und ist die Randfunktion φ regulär, so kann man aus diesen Daten stets eine Konstante $K \geq 0$ ausrechnen, für die die B. S. C. erfüllt ist.
- (2) Uns interessieren in dieser Vorlesung die “klassischen Minimalflächen” im \mathbb{R}^3 , also der Fall, wo das Parametergebiet Ω in der Ebene liegt. Haar formulierte in seiner Arbeit [Haar] die

3–Punkte–Bedingung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und konvex. Die Randmannigfaltigkeit Γ erfüllt die 3–Punkte–Bedingung mit Konstante K , wenn man durch drei beliebig vorgegebene verschiedene Punkte aus Γ eine Ebene E legen kann, deren Steigung durch K beschränkt ist.

Es gilt (vgl. [Gilbarg, Trudinger], S. 314):

Im Fall $n = 2$ sind die B. S. C. und die 3–Punkte–Bedingung zueinander äquivalent; die Konstanten sind jeweils gleich.

Wir kommen jetzt zur Diskussion des Variationsproblems $A_\Omega(\cdot) \rightarrow \min$ bei vorgegebener Randfunktion $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in geeigneten Klassen von Lipschitz-Funktionen $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei nehmen wir an:

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und konvex
- (ii) $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, also

$$|\varphi(x) - \varphi(z)| \leq c|x - z|$$

für alle $x, z \in \partial\Omega$ mit einer Konstanten $c > 0$.

- (iii) Die Randmannigfaltigkeit Γ genügt der B. S. C. mit einer Konstante K .

Dabei können wir o. E. annehmen, dass $K = c$ ist, denn aus der B. S. C. mit Konstante K folgt sofort

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

für alle $x, y \in \partial\Omega$. Sonst ersetze man beide Konstanten durch $\max(K, c)$. Außerdem bedeutet es keinerlei Einschränkung, φ als Lipschitz-stetig mit Konstante K auf $\bar{\Omega}$ vorauszusetzen, denn es gilt der

Satz von Kirszbraun: (siehe [Federer], S. 201)

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ Lipschitz-stetig, so gibt es eine Lipschitz-Abbildung $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\bar{f}|_M = f$ und $\text{Lip } \bar{f} = \text{Lip } f$.

Das heißt: Man kann jede Lipschitz-Abbildung unter Erhaltung der Lipschitz-Konstanten auf den ganzen Raum fortsetzen. Für $N = 1$ ist das eine Übungsaufgabe, in höherdimensionalen Bildräumen argumentiert man mit dem Lemma von Zorn.

Wir wählen jetzt $R > K$ beliebig und betrachten das Funktional

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

auf der Klasse $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, f_R sei die nach Satz 6.2 existierende eindeutige Minimalstelle von A_Ω in $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$, und wir zeigen:

$$\text{Lip } f_R \leq K, \tag{6.4}$$

d.ß.h. die Lipschitz-Konstante von f_R wird durch K beschränkt, und ist somit echt kleiner als R .

Zum Beweis von (6.4) wählt man $x_0 \in \partial\Omega$ und dazu affin-lineare Funktionen $L^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} L^- \leq \varphi \leq L^+ \text{ auf } \partial\Omega, \quad \text{Lip } L^\pm \leq K, \\ L^-(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi(x_0) = L^+(x_0). \end{aligned}$$

Die Funktionen L^\pm gehören zu $\text{Lip}_R(\Omega, L^\pm|_{\partial\Omega})$ und lösen auf Ω natürlich die Minimalflächengleichung, mithin folgt aus Teil (iii) von Satz 6.3, dass L^\pm die eindeutigen A_Ω -Minimalstellen in $\text{Lip}_R(\Omega, L^\pm|_{\partial\Omega})$ sind. Also können wir das Vergleichsprinzip Satz 6.3, (ii) anwenden, woraus folgt:

$$L^- \leq f_R \leq L^+ \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Für $x \in \bar{\Omega}$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned} f_R(x) - f_R(x_0) &\leq L^+(x) - f_R(x_0) = L^+(x) - \varphi(x_0) \\ &= L^+(x) - L^+(x_0) \leq K|x - x_0| \end{aligned}$$

und entsprechend: $f_R(x) - f_R(x_0) \geq -K|x - x_0|$, so dass wir zunächst bekommen:

$$|f_R(x) - f_R(y)| \leq K|x - y| \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}, y \in \partial\Omega. \quad (6.5)$$

Seien x, y nun beliebige Punkte aus Ω . Man setzt $v := y - x$ und betrachtet das Gebiet

$$\Omega' := \Omega \cap (v + \Omega),$$

wo $v + \Omega$ die um v verschobene Menge repräsentiert (Fig. 6.3).

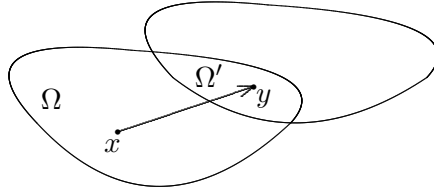


Fig. 6.3

Man setzt $f_{1,2} : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(z) := f_R(z)$, $f_2(z) := f_R(z - v)$, und sieht: Die f_i sind $A_{\Omega'}$ -minimal in $\text{Lip}_R(\Omega', f_i|_{\partial\Omega'})$, und das Vergleichsprinzip Satz 6.2, (ii) liefert die Abschätzung

$$\sup_{z \in \Omega'} |f_1(z) - f_2(z)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega'} |f_1(z) - f_2(z)|,$$

also

$$\sup_{z \in \Omega'} |f_R(z) - f_R(z - v)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega'} |f_R(z) - f_R(z - v)|.$$

Das Supremum rechts wird realisiert in einem Punkt $z_0 \in \partial\Omega'$.

Fall 1: Ist $z_0 \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$, so gilt:

$$\begin{aligned} |f_R(y) - f_R(x)| &= |f_R(y) - f_R(y - v)| \leq \sup_{z \in \Omega'} |f_R(z) - f_R(z - v)| \\ &\leq |f_R(z_0) - f_R(z_0 - v)| \end{aligned}$$

Der Punkt $z_0 - v$ liegt in $\bar{\Omega}$, z_0 gehört zum Rand von Ω , also gilt nach (6.5)

$$|f_R(z_0) - f_R(z_0 - v)| \leq K|v| = K|x - y|.$$

Fall 2: Ist $z_0 \in \Omega \cap \partial\Omega'$, so gehört $z_0 - v$ zu $\partial\Omega$ und man kann wieder (6.5) benutzen. Insgesamt ist damit bewiesen:

SATZ 6.4

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex, $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, und die B. S. C. sei mit $K \geq 0$ erfüllt. Dann ist für alle $R > K$

$$\text{Lip } f_R \leq K,$$

wobei f_R die eindeutige Minimalstelle von A_Ω in $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$ bezeichnet. Die Lipschitz-Konstante von f_R ist also echt kleiner als die vorgegebene Schranke R .

BEMERKUNGEN

- (1) Satz 6.4 beinhaltet eine sog. **a priori Abschätzung für den Gradienten**, die durch die B. S. C. erzwungen wird.
- (2) Aus der Lipschitz-Stetigkeit von $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, zusammen mit der Gültigkeit der B. S. C. mit Konstante K folgt natürlich

$$\text{Lip } \varphi \leq K,$$

denn sind L^\pm entsprechende Funktionen zum Randpunkt $x \in \partial\Omega$, so gilt

$$\varphi(x) - \varphi(y) = L^-(x) - \varphi(y) \leq L^-(x) - L^-(y) \leq K|x - y|$$

und entsprechend

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq L^+(x) - L^+(y) \geq -K|x - y|.$$

□

Nach diesen Vorbereitungen sind wir jetzt in der Lage, einen Existenzsatz für das Minimalflächenproblem zu formulieren:

SATZ 6.5

Seien Ω beschränkt und konvex sowie $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Erfüllen Ω und φ eine B. S. C., so gibt es genau eine Funktion $f \in \text{Lip}(\Omega, \varphi) := \{g \in \text{Lip}(\Omega) : g|_{\partial\Omega} = \varphi\}$, so dass

$$A_\Omega(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx \leq A_\Omega(g)$$

für alle $g \in \text{Lip}(\Omega, \varphi)$ gilt.

BEWEIS

Man wählt $R > K$ (K die Konstante aus der B.S.C.) und betrachtet die A_Ω -Minimalstelle f_R in $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$. Nach Satz 6.4 gilt

$$\text{Lip } f_R < R,$$

so dass $f_R + \varepsilon \cdot (g - f_R) \in \text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$ ist für jede beliebige Funktion $g \in \text{Lip}(\Omega, \varphi)$ und für $|\varepsilon| \ll 1$. Es folgt:

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f_R + \varepsilon(g - f_R)),$$

was $\frac{d}{d\varepsilon|_0} A_\Omega(f_R + \varepsilon(g - f_R)) = 0$ bedeutet, also:

$$\int_{\Omega} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla(g - f) \, dx = 0. \quad (6.6)$$

Mit $F(p) := \sqrt{1 + |p|^2}$ ist für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$F(q) - F(p) = \nabla F(p) \cdot (q - p) + D^2 F(q^*)(q - p, q - p),$$

wo q^* eine geeignete Zwischenstelle bezeichnet. Nun ist F konvex, also

$$D^2 F(q^*)(q - p, q - p) > 0,$$

und mit $q := \nabla g, p := \nabla f$ folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx - \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx \\ & \geq \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla(g - f) (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \, dx, \end{aligned}$$

und die rechte Seite ist gemäß (6.6) identisch 0, also

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \geq \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx,$$

und das war zu zeigen. □

Lassen wir also Lipschitz-Graphen als Minimalflächen zu, so finden wir in dieser erweiterten Klasse eine Fläche kleinsten Inhalts. Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob man an solchen Lösungen überhaupt interessiert ist, denn Lipschitz-Graphen können ja durchaus Knickstellen haben, so dass gar keine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer früheren Definition vorliegen muss. Es ist zum Beispiel unmöglich, die mittlere Krümmung für Lipschitz-Graphen zu erklären. Somit besteht eine Lücke zwischen unseren Betrachtungen aus § 5, wo wir C^2 -Lösungen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

$$\text{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad (6.7)$$

diskutiert haben, und der vorstehenden Diskussion der Existenzfrage, die man leider nur in Klassen von nicht glatten Funktionen führen kann: Der naheliegende Gedanke das Problem

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx \rightarrow \min \text{ in } \mathcal{C},$$

$$\mathcal{C} := \{g \in C^2(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \varphi\},$$

zu studieren, und damit direkt glatte Lösungen von (6.7) zu produzieren, führt nicht zum Ziel. Ist nämlich (f_m) Minimalfolge in \mathcal{C} , so möchte man eine Teilfolge wählen, die gegen eine C^2 -Funktion $f \in \mathcal{C}$ konvergiert. Dazu ist aber erforderlich, solche Schranken auf (f_m) zu finden, die Kompaktheit in der C^2 -Topologie garantieren. (Zum Beispiel könnten C^3 -Normen von (f_m) uniform beschränkt sein, was die Anwendbarkeit des von Satzes Arzelà–Ascoli bedeuten würde.) Leider hat man hier zu wenig Information über die Minimalfolge; mit der direkten Methode der Variationsrechnung lassen sich keine glatten Lösungen produzieren.

Andererseits hegt man durchaus die Hoffnung, dass unsere Lipschitz–Minimalstelle $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vielleicht besser regulär ist als es zunächst den Anschein hat. Dies führt uns in die sog. **Regularitätstheorie**. Tatsächlich gilt der sehr tiefe

SATZ 6.6 (Regularitätssatz von De Giorgi)

Die in Satz 6.5 erzeugte Lipschitz–Minimalstelle $f \in \text{Lip}(\Omega, \varphi)$ des Flächenfunktionalen ist auf Ω reell analytisch.

Dieser Satz hat eine lange Geschichte, die mit der Untersuchung des zweidimensionalen Spezialfalls $n = 2$ durch Haar und Radó um 1930 beginnt: Wir wissen bereits, dass für $n = 2$ die C^2 -Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung reell analytisch sind. Mithin bleibt zu zeigen, dass die Lipschitz–Minimalstelle zweimal stetig differenzierbar ist, und genau das wurde von Haar und Radó mit einem relativ einfachen Argument bewiesen. Eine Beweisskizze findet man bei [Nitsche] (§ 639 ff.) und in [Radó] (Kap. IV). Diese Argumente sind allerdings streng zweidimensionaler Natur und haben keine Verallgemeinerung für Dimensionen $n \geq 3$.

In höheren Dimensionen $n \geq 3$ ist die Situation folgendermaßen: Die allgemeine Theorie der nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen liefert:

Ist f von der Klasse $C^{1,\alpha}$ (die ersten Ableitungen sind Hölder–stetig mit einem Exponenten $0 < \alpha < 1$), so folgt Analytizität von f .

Dies wurde von Morrey in den 1940er Jahren bewiesen. Übrig bleibt der Sprung von Lipschitz auf $C^{1,\alpha}$, und darin besteht die Leistung von E. De Giorgi (aus Pisa), dem dies 1957 gelang. Leider ist diese Arbeit in einer heute nicht mehr existierenden italienischen Zeitschrift publiziert.

Einen völlig anderen Zugang zum Existenz– und Regularitätsproblem bei der nichtparametrischen Minimalflächengleichung findet man bei [Gilbarg, Trudinger], die

zunächst a priori Abschätzungen für glatte Lösungen beweisen und dann funktionalanalytische Argumente ins Spiel bringen.

§ 7

Das Plateau–Problem für Minimalflächen vom Kreisscheibentypus

Wir erinnern an ein Ergebnis aus §3: Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche (zweidimensionale Mannigfaltigkeit) vom Typ der Kreisscheibe $D := D_1(0)$, die durch $F : D \rightarrow S$ konform parametrisiert ist (d. h. $|\partial_u F| = |\partial_v F|$ und $\partial_u F \cdot \partial_v F = 0$ auf D), so gilt:

$$H_S \equiv 0 \iff \Delta F = 0,$$

wobei H_S die mittlere Krümmung von S ist.

Sei nun Γ eine geschlossene Kurve in \mathbb{R}^3 . Wir suchen eine Minimalfläche S vom Typ der Kreisscheibe mit Rand Γ , d. h. $H_S \equiv 0$, $\partial S = \Gamma$, S ist diffeomorph zu D . Alternativ lässt sich das so formulieren:

Gesucht: Eine Abbildung $x : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

- (i) x ist stetig auf \bar{D} .
- (ii) x ist glatt auf D und erfüllt dort die Konformitätsrelationen.
- (iii) $x|_{\partial D}$ bildet ∂D homöomorph auf Γ ab.

Dann ist $x(\bar{D})$ im verallgemeinerten Sinn eine Minimalfläche mit Randkurve Γ . Der Zusatz “verallgemeinerte Fläche” bezieht sich darauf, dass Verzweigungspunkte (d. h. Nullstellen der Ableitung) nicht ausgeschlossen sind (zunächst).

Wie findet man x mit o. g. Eigenschaften?

Der Flächeninhalt von $x(D)$ ist im Falle einer zusätzlich injektiven Abbildung x gegeben durch

$$A(x) = \int_D |\partial_u x \wedge \partial_v x| \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_D (|\partial_u x|^2 + |\partial_v x|^2) \, du \, dv =: \mathcal{D}(x),$$

wobei man natürlich die Konformität von x ausgenutzt hat, um den Flächeninhalt in das Dirichlet-Integral \mathcal{D} umzurechnen. Andererseits gilt für beliebige Abbildungen $y : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ stets die Ungleichung

$$\int_D |\partial_u y \wedge \partial_v y| \leq \frac{1}{2} \int_D (|\partial_u y|^2 + |\partial_v y|^2) du dv$$

(mit “=” für konforme y). Also wird man versuchen, das Dirichlet-Integral \mathcal{D} auf einer geeigneten Klasse zu minimieren in der Hoffnung, dass die Minimalstelle — sofern sie existiert — konform ist, und somit auch den Flächeninhalt minimiert, was automatisch das Verschwinden der mittleren Krümmung zur Folge hat.

Genauer betrachten wir folgende Klasse \mathcal{C} von Abbildungen $x : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

- (a) x ist stetig auf \bar{D} .
- (b) $x \in C^1(D)$.
- (c) $\mathcal{D}(x) < \infty$.
- (d) $x|_{\partial D}$ bildet ∂D **monoton** auf Γ ab.

Für beliebige geschlossene Kurven $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ kann \mathcal{C} durchaus leer sein, d. h. Γ berandet gar keine Fläche vom D -Typ. Um diesen Fall auszuschließen, nehmen wir Γ als **differenzierbar** an. Unter dieser Voraussetzung ist $\mathcal{C} \neq \emptyset$. ($\mathcal{C} \neq \emptyset$ folgt bereits aus viel schwächeren Forderungen an Γ .)

Die Voraussetzung an Γ besagt: Es gibt eine C^1 -Funktion $\varphi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \varphi(e^{it})$, deren Spur gerade Γ ist; mit der Poisson-Integralformel kann man φ von ∂D auf \bar{D} fortsetzen, diese Fortsetzung ist harmonisch auf D . (Das Poisson-Integral liefert eine Lösung des Dirichlet-Problems $\Delta \bar{\varphi} = 0$ auf D , $\bar{\varphi}|_{\partial D} = \varphi$, wenn man φ als Abbildung $\partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$ auffasst.)

SATZ 7.1

Unter den genannten Voraussetzungen findet man $y \in \mathcal{C}$ mit

$$\mathcal{D}(y) \leq \mathcal{D}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{C}.$$

Dabei erfüllt y die Bedingungen (i)–(iii) von oben, ist also eine verallgemeinerte Minimalfläche.

BEWEIS

Sei $d := \inf_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ und sei $x^\nu \in \mathcal{C}$ so gewählt, dass

$$d^\nu := \mathcal{D}(x^\nu) \xrightarrow{\nu} d$$

gilt. Mit y^ν bezeichnen wir die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems

$$\Delta y^\nu = 0 \text{ auf } D, \quad y^\nu|_{\partial D} = x^\nu|_{\partial D}.$$

Da harmonische Funktionen das Dirichlet-Integral zu ihren Randwerten minimieren, gilt (beachte $y^\nu \in \mathcal{C}$):

$$d \leq \mathcal{D}(y^\nu) \leq \mathcal{D}(x^\nu).$$

Ist $\phi : D \rightarrow D$ eine beliebige, konforme Transformation von D auf sich, so gehört $y^\nu \circ \phi$ ebenfalls zu \mathcal{C} mit

$$\mathcal{D}(y^\nu \circ \phi) = \mathcal{D}(y^\nu).$$

Um die Wirkung der konformen Gruppe auszuschalten und um zu gewährleisten, dass die Konvergenz der Minimalfolge nicht auf Grund des Ausartens der linearen Transformationen scheitert, stellt man folgende **Normalitätsforderung**:

Auf ∂D und Γ werden jeweils drei verschiedene Punkte w_1, w_2, w_3 bzw. P_1, P_2, P_3 gewählt, $\hat{\mathcal{C}}$ sei dann die Teilklasse von \mathcal{C} , deren Elemente x zusätzlich

$$x(w_i) = P_i$$

erfüllen.

Durch Anwendung einer geeigneten gebrochen-linearen Transformation können wir o. E. $y^\nu \in \hat{\mathcal{C}}$ annehmen. Damit beweist man das fundamentale Lemma (vgl. [Nitsche], § 297), dass die Randabbildungen $y^\nu|_{\partial D}$ **gleichgradig stetig** sein müssen. Somit hat man eine Folge (y^ν) harmonischer Funktionen, die am Rand gleichgradig stetig sind und zudem uniform beschränkte Dirichlet-Integrale haben. Dann konvergiert eine Teilfolge gegen ein Element $y \in \hat{\mathcal{C}}$ mit

$$\mathcal{D}(y) = d.$$

Ein weiteres Variationsargument liefert die noch ausstehende Konformität von y : Sei $\phi_t : D \rightarrow D$ eine glatte Schar von Diffeomorphismen mit

$$\phi_0 = id_D, \quad \text{spt}(\phi_t - id_D) \subset K \subset D$$

für eine kompakte Menge K . Dann ist $y \circ \phi_t \in \hat{\mathcal{C}}$, also $\mathcal{D}(y) \leq \mathcal{D}(y \circ \phi_t)$, was

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \int_D |\partial_u(y \circ \phi_t)|^2 + |\partial_v(y \circ \phi_t)|^2 du dv = 0$$

bedeutet. Wertet man diese Relation aus und benutzt die Beliebigkeit von ϕ_t , so folgt die Holomorphie des sog. Hopf-Differentials

$$|\partial_u y|^2 - |\partial_v y|^2 - 2i \partial_u y \cdot \partial_v y =: \xi.$$

Schließlich folgt $\xi \equiv 0$, weil man oben nicht nur ϕ_t zulassen kann mit $\text{spt}(\phi_t - id_D) \subset$ kompakte Menge. Man kann vielmehr solche Umparametrisierungen von \bar{D} zulassen, so dass $y \circ \phi_t|_{\partial D}$ den Rand ∂D monoton auf Γ abbildet. \square