Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 7.1.2013

Analysis einer Veränderlichen — Präsenzaufgaben 10

Aufgabe 1: Zwischnwertsatz

Zeigen Sie, dass die folgende Gleichnung für alle $y \in \mathbb{R}$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

$$x^3 = y$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x^n = \pi.$$

Aufgabe 2: Folge von Summen

Sei $(x_k)_k$ eine positive folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie $a_n = \sum_{k=0}^n x_k$ konvergiert, genau dann wenn $\sum_{k=0}^\infty x_k < \infty$.
Wie ist es im Falle von beliebigen Folgen $(x_k)_k$?

Aufgabe 3: Kovergenzradius

Es sei $1 < b$ und $b^{-k} < a_k < 1000b^{-k}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_k a_k x^k?$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe absolut?

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 + 2x^2 < 2\}$$

ist offen.

Aufgabe 5: Metrik

Sei X eine Menge. Wir definieren darauf die diskrete Metrik $d(x, y) := 1$ wenn $x \neq y$ und $d(x, x) = 0$.
Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist (Wiederholung).
Zeigen Sie, dass $x_k \to x$ bezüeglich d, genau dann, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_k = x$ für alle $k \geq N$.
Zeigen Sie, wenn $A \subset X$, so ist diese Menge offen, bez. d.
Zeigen Sie, wenn $A \subset X$, so ist diese Menge abgeschlossen, bez. d.
Zeigen Sie, wenn $A \subset X$ ist kompakt, bez. d, genau dann, wenn A endlich viele element hat.