Prof. Dr. Lars Diening
Dr. Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 26.11.2013

Analysis einer Veränderlichen — Präsenzaufgaben 6

Aufgabe 1:

$\mathbb{R}^n$ ist mit $d(x,y) := \|x-y\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ ein metrischer Raum. Auf $(\mathbb{R}^n, d)$ definieren wir die Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf die i-te Koordinatenachse durch

$$\begin{aligned} \Pi_i : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass Π_i stetig ist.

Aufgabe 2:
Es sei $f : [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{falls } x \in (2,3] \end{cases}$$

definiert. f ist bijektiv. Zeigen Sie, dass f stetig ist, während die Umkehrfunktion f^{-1} unstetig ist.

Aufgabe 3:
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$, $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [b,c) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} h : (a,c) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in (a,b] \\ g(x) & \text{falls } x \in (b,c) \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 4:
Sei die floor-Funktion $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ durch $x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto |\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor - x|$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ist nicht stetig.

(b) Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ gilt $f(x) = |x|$.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(x+n) = f(x)$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. *Hinweis:* Verwenden Sie, dass $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist (wird auf dem Übungsblatt bewiesen!) sowie Aufgabe 3.

Tatsächlich haben wir stetige und unstetige Funktionen gefunden, die verknüpft dennoch eine stetige Funktion ergeben. Dies gilt im Allgemeinen natürlich nicht.